ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE
DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

N° 357 JANVIER 1978

SERIE : **THEORIES ET METHODES DE CALCUL**

ISSN 0020-2568 **N° 212**

CALCUL STATIQUE DES SYSTÈMES DE CONTREVENTEMENT TRIDIMENSIONNELS IRRÉGULIERS PAR LA MÉTHODE DES MATRICES-TRANSFERT

par

Michel HENIN
Ingénieur civil de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Docteur-Ingénieur
Ingénieur au Bureau Veritas

Parijs 1976

INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

CALCUL STATIQUE DES SYSTEMES DE CONTREVENTEMENT TRIDIMENSIONNELS IRREGULIERS PAR LA METHODE DES MATRICES TRANSFERT

On présente une méthode générale de calcul par ordinateur des systèmes de contreventement tridimensionnels constitués de voiles reliés par des linteaux.

Cette méthode utilise la technique des matrices transfert et permet de traiter des structures présentant des fondations élastiques, des discontinuités de section et des répartitions irrégulières de linteaux. Elle tient compte du gauchissement propre des voiles et de leurs déformations d'effort normal.

Les calculs se font dans le cadre de trois hypothèses fondamentales : élasticité linéaire, théorie des poutres de Vlassov et indéformabilité transversale des sections horizontales.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à la construction des différentes matrices transfert utilisées dans le calcul global, qui fait lui-même l'objet du troisième chapitre. Le quatrième chapitre présente deux exemples permettant d'établir des comparaisons avec d'autres méthodes. Un complément, permettant la prise en compte approchée des portiques multitravées réguliers non symétriques est exposé en annexe.

STATIC CALCULATION OF IRREGULAR THREE-DIMENSIONAL WIND BRACING SYSTEMS BY THE METHOD OF TRANSFER MATRICES

A general method of calculation by computer of three-dimensional wind bracing systems composed of shells connected by lintels is presented.

This method uses the technique of transfer matrices and makes it possible to treat structures presenting elastic foundations, section discontinuities and irregular distributions of lintels. It takes into account the warping natural to shells and their deformations by normal force.

The calculations are made in the framework of three basic assumptions: linear elasticity, Vlassov's beam theory and transverse nondeformability of horizontal sections.

The first two chapters are devoted to the building of the different transfer matrices used in the overall calculation, which is itself the subjet of the third chapter. The fourth chapter presents two examples which permit establishing comparisons with other methods. A complement, whereby the regular non-symmetrical multispan frames are taken into account by approximation, is set forth in an annex.

STATISTISCHE BERECHNUNG DER UNREGELMÄSSIGEN DREIDIMENSIONALEN WINDAUSSTEIFUNGS SYSTEMEN DURCH DIE METHODE DER ÜBERTRAGUNGSMATRIZEN

Untersucht wird hier eine allgemeine Methode zur Computerberechnung der dreidimensionalen Windaussteifungs systemen, bestehend aus durch Querriegel verbundenen Scheiben.

Diese Methode benützt die Technik der Übertragungsmatrizen und es können damit Strukturen mit elastischen Fundamenten, mit Querschnittsunterbrechungen sowie ungleichmässige Verteilungen der Querriegel behandelt werden. Dabei wird die eigene Verwölbung der Scheiben und deren durch normale Kraft verursachten Verformungen berücksichtigt.

Die Berechnungen erfolgen im Rahmen dreier grundsätzlicher Annahmen : lineare Elastizität, Vlassov'sche Balkentheorie und Querunverformbarkeit der horizontalen Querschnitten.

Die beiden ersten Kapiteln behandeln die Konstruktion der verschiedenen in der Gesamtberechnung benützten Übertragungsmatrizen und das dritte Kapitel ist der Gesamtberechnung gewidmet. Im vierten Kapitel werden zwei Beispiele angeführt, zum Vergleich mit anderen Methoden. Im Anhang wird dazu noch die angenäherte Berücksichtigung der nichtsymmetrischen regelmässigen mehrfeldrigen Rahmen erläutert.

CALCULO ESTATICO DE LOS SISTEMAS DE ARRIOSTRAMIENTO TRIDIMENSIONALES IRREGULARES MEDIANTE EL METODO DE MATRICES DE TRANSFERENCIA

Se presenta un método general de cálculo mediante computador de los sistemas de arriostramiento tridimensionales constituidos por láminas unidas mediante dinteles.

Este método emplea la técnica de las matrices de transferencia y permite tratar estructuras que presentan cimientos elásticos, discontinuidades de sección y distribuciones irregulares de los dinteles, teniendo en cuenta el alabeo propio de las láminas y sus deformaciones originadas por el esfuerzo normal.

Los cálculos se efectúan en el contexto de tres hipótesis fundamentales : elasticidad lineal, teoría de las vigas de Vlassov e indeformabilidad transversal de las secciones horizontales.

Los dos primeros capítulos han sido dedicados a la construcción de las distintas matrices de transferencia utilizadas en el cálculo global, el cual, es tratado en el tercer capítulo. El cuarto capítulo presenta dos ejemplos que permiten establecer comparaciones con los demás métodos. En el anexo se presenta un complemento que permite tomar realmente en consideración los pórticos de crujías múltiples no simétricos.

Mots clés : Méthode de calcul - Contreventement - Voile - Linteau - Matrice - Calcul matriciel - Ordinateur.

Les thèses et la méthode d'exposition adoptées par les auteurs peuvent parfois heurter certains points de vue habituellement admis. Mais il doit être compris que ces thèses, à l'égard desquelles l'Institut Technique ne saurait prendre parti, ne visent en rien les personnes ni le principe des Institutions.

© 1978, by LE BATIMENT (S.A.R.L.)

UNIV. LEIDEN BIBL.

CALCUL STATIQUE DES SYSTÈMES DE CONTREVENTEMENT TRIDIMENSIONNELS IRRÉGULIERS PAR LA MÉTHODE DES MATRICES-TRANSFERT (*)

par Michel HENIN

INTRODUCTION

La plupart des immeubles élancés construits actuellement sont contreventés par des murs, des voiles ou des noyaux. Le calcul statique de telles structures, soumises à des charges de vent, a été abordé il y a une vingtaine d'années et plusieurs méthodes sont aujoud'hui à la disposition des ingénieurs.

Les méthodes dites continues correspondent à la généralisation de la méthode de M. Albigès et J. Goulet [2] : chaque file de linteaux est remplacée par un milieu continu équivalent travaillant au cisaillement. Après un premier calcul, à chacun des refends ajourés est associé un « refend équivalent » ayant sensiblement même comportement.

L'ensemble du contreventement est alors traité comme un système de consoles travaillant conjointement en flexion et torsion.

Ces méthodes s'appliquent mal aux systèmes de contreventement présentant des discontinuités de section ou une répartition irrégulière de linteaux. Elles négligent de plus le gauchissement propre des voiles, qui peut dans certains cas jouer un rôle important (noyaux).

Les méthodes discontinues permettent de calculer les systèmes de contreventement comme des systèmes tridimensionnels de poutres (voiles en tronçons de un étage + linteaux). Elles sont assez lourdes et peu économiques en temps-machine, difficiles à mettre en données et négligent, elles-aussi, le gauchissement propre des voiles.

Le but de cette étude est de présenter une méthode générale de calcul par ordinateur des contreventements tridimensionnels constitués de voiles reliés par des linteaux.

Cette méthode autorise les discontinuités de section (avec changement de ligne moyenne des voiles et éventuellement disparition de certains voiles dans les étages supérieurs), les répartitions irrégulières de linteaux et la présence de fondations élastiques. Elle tient compte du gauchissement propre des voiles et de leurs déformations d'effort normal.

Elle conduit, en outre, à des calculs économiques en temps-machine et occupation-mémoire.

Hypothèses fondamentales

Hypothèse 1 : Les calculs se font dans le domaine élastique linéaire.

Hypothèse 2 : Le fonctionnement des voiles en flexion, torsion et compression-traction est régi par la théorie usuelle des poutres, sans distorsion, généralisée par Vlassov [7].

Hypothèse 3 : Les planchers sont infiniment souples hors de leur plan, et indéformables dans leur plan. Cette indéformabilité transversale des sections est étendue aux niveaux entre planchers.

Principe de la méthode

Elle utilise la technique des matrices transfert. Le vecteur-état considéré comporte un certain nombre de paramètres décrivant le comportement en flexion, torsion gauchie et compression-traction de la section entière du contreventement, à un niveau donné. Une matrice transfert est associée à chaque type de singularité (niveau à linteaux, discontinuité de section, fondations élastiques) et aux « tranches » du système de contreventement comprises entre deux singularités successives.

Le premier chapitre est consacré à la construction de la matrice transfert d'un tronçon régulier de système de contreventement, sans linteaux. Le second chapitre étudie les matrices transfert associées aux trois types de singularités indiqués ci-dessus. Le troisième chapitre expose l'application au calcul pratique des systèmes de contreventement. Le quatrième chapitre présente deux exemples de calcul. Une méthode approchée, permettant la prise en compte des portiques multitravées réguliers non symétriques, est exposée en annexes.

(*) Cet article présente l'essentiel de la thèse de Docteur-Ingénieur soutenue par l'auteur, le 8 août 1976, à l'Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI.

CHAPITRE I

MATRICE-TRANSFERT D'UN TRONÇON REGULIER DE CONTREVENTEMENT SANS LINTEAUX

1.1. Notations

Le tronçon étudié (fig. 1) est rapporté à son repère principal C $x\,y\,z$, trirectangle direct ($\overrightarrow{Cz}$ vertical ascendant). $\overrightarrow{Cz}$ est la ligne des centres de flexion.

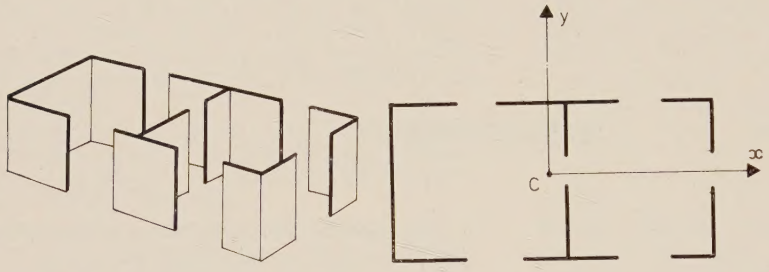


Fig. 1. — **Tronçon de contreventement étudié.**

Les aires sectorielles principales ω (M) sont comptées positivement pour une rotation positive du rayon vecteur $\overrightarrow{CM}$.

G_j, C_j : centres de gravité et de flexion du voile j.

E_j, G_j : modules d'élasticité longitudinal et transversal du voile j (seul le contexte permettra de ne pas confondre G_j ainsi défini avec le centre de gravité de j).

On introduit :

$$EI_{xx} = \sum_j E_j \int_{\text{voile } j} [x\,(M) - x\,(G_j)]^2\, d\,F$$

$$EI_{yy} = \sum_j E_j \int_{\text{voile } j} [y\,(M) - y\,(G_j)]^2\, d\,F$$

$$EJ_{\omega} = \sum_j E_j \int_{\text{voile } j} [\omega\,(M)]^2\, d\,F$$

$$GJ_d = \frac{1}{3} \sum_j G_j \int_{\text{voile } j} e^3\,(s)\, ds$$

avec $e\,(s)$ = épaisseur du voile à l'abscisse curviligne s et $d\,F = e\,(s)\,ds$.

Les charges extérieures sont définies de la façon suivante :

$q_x\,(z)$: densité de charge transversale parallèle à $\overrightarrow{Cx}$, sollicitant toute la section de cote z et appliquée en C.

$q_y\,(z)$: homologue de $q_x\,(z)$ pour la direction $\overrightarrow{Cy}$.

$p_j\,(z)$: densité d'effort longitudinal appliquée à la cote z à l'élément j et centrée en G_j, centre de gravité de j.

$\gamma_x\,(z)$: densité de couple d'axe $\overrightarrow{Cx}$ sollicitant toute la section de cote z et appliquée en C.

$\gamma_y\,(z)$: homologue de $\gamma_x\,(z)$ pour la direction $\overrightarrow{Cy}$.
(Les densités $\gamma_x\,(z)$ et $\gamma_y\,(z)$ incluent les couples dus à d'éventuels excentrements des $p_j\,(z)$).

$m\,(z)$: densité de couple de torsion (axe $\overrightarrow{Cz}$), appliquée en C.
(Inclut les éventuels couples de torsion créés par le transport de $q_x\,(z)$ et $q_y\,(z)$ en C.)

$b\,(z)$: densité de bimoment (comprend les bimoments induits par $p_j\,(z)$, $\gamma_x\,(z)$ et $\gamma_y\,(z)$).

Le sens positif de ces densités est le sens positif des axes qui les portent.

Signe des bimoments : par convention, un effort longitudinal positif appliqué en un point M (x, y, ω) de la section z du tronçon, crée un bimoment du signe de ω.

Les densités ci-dessus sont des densités généralisées englobant les efforts concentrés (utilisation des fonctions de Dirac et de Heaviside).

Les efforts internes sont définis de la façon suivante :

$T_x\,(z)$: effort tranchant suivant $\overrightarrow{Cx}$, c'est-à-dire résultante suivant $\overrightarrow{Cx}$ des efforts transversaux exercés par la partie du tronçon ($t > z$) sur la partie ($t \leqslant z$); appliqué en C.

$T_y(z)$: homologue de $T_x(z)$ suivant $\overrightarrow{Cy}$.

$M_x(z)$: moment de flexion d'axe $\overrightarrow{Cx}$, c'est-à-dire composante suivant $\overrightarrow{Cx}$ de la part de moment exercée par $(t > z)$ sur $(t \leqslant z)$ et effectivement reprise en flexion par la structure (par opposition à la part de moment reprise en compression-traction dans les voiles); appliqué en C.

$M_y(z)$: homologue de $M_x(z)$ pour $\overrightarrow{Cy}$.

$N_j(z)$: effort normal dans le voile j, c'est-à-dire résultante des efforts longitudinaux exercés par la partie $(t > z)$ du voile j sur la partie $(t \leqslant z)$; appliqué en G_j.

$H(z)$: moment de torsion exercé par $(t > z)$ sur $(t \leqslant z)$; appliqué en C.

$B(z)$: bimoment exercé par $(t > z)$ sur $(t \leqslant z)$.

Les déplacements sont définis de la façon suivante :

$v_x(z)$: déplacement horizontal suivant $\overrightarrow{Cx}$ du centre de flexion C de la section de cote z.

$v_y(z)$: homologue de $v_x(z)$ pour $\overrightarrow{Cy}$.

$\theta(z)$: angle de torsion autour de C de la section de cote z.

$v'_x(z)$, $v'_y(z)$, $\theta'(z)$: dérivées par rapport à z de $v_x(z)$, $v_y(z)$ et $\theta(z)$.

$u_j(z, M)$: déplacement longitudinal à la cote z d'un point M du voile j.

$u_j(z)$: déplacement longitudinal d'ensemble de la section transversale du voile j à la cote z ($u_j(z, M)$ est la somme de $u_j(z)$ et des déplacements dus à la flexion et au gauchissement).

Les angles sont comptés positivement dans le sens direct, les déplacements dans le sens des axes qui les portent.

L'hypothèse d'indéformabilité transversale des sections fait que chaque section du tronçon étudié ne possède horizontalement que trois degrés de liberté. Aussi pourrons-nous caractériser le déplacement horizontal de toute section par la donnée des deux flèches horizontales principales de son centre de flexion C et de l'angle de rotation autour de celui-ci. Les planchers étant supposés infiniment souples hors de leur plan, chacun des voiles travaille indépendamment des autres en compression-traction (ce ne sera plus le cas lorsque interviendront les linteaux).

De ce qui précède, nous déduisons que l'étude d'un tronçon régulier de contreventement sans linteaux peut se faire en quatre parties indépendantes : étude de la flexion suivant (C*xz*), de la flexion suivant (C*yz*), de la torsion autour de $\overrightarrow{Cz}$ et de la compression simple dans chaque voile.

1.2. Sous-matrices - transfert de flexion

1.21. *Flexion dans le plan principal Cxz*

Equations d'équilibre :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d\,T_x}{dz}(z) = -\,q_x(z) \\ \dfrac{d\,M_y}{dz}(z) = -\,T_x(z) - \gamma_y(z) \end{array}\right.$$

Théorie des poutres sans distorsion : $\dfrac{d^2 v_x}{dz^2}(z) = +\dfrac{M_y}{EI_{xx}}(z)$ (élasticité linéaire).

Par intégrations successives on obtient : $T_x(z)$, $M_y(z)$, $v'_x(z)$ et $v_x(z)$ en fonction de $T_x(0)$, $M_y(0)$, $v'_x(0)$, $v_x(0)$ et d'intégrales d'ordre 1, 2, 3 ou 4 de $q_x(z)$ et $\gamma_y(z)$. Soit, noté matriciellement :

$$\begin{bmatrix} v_x(z) \\ v'_x(z) \\ M_y(z) \\ T_x(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & \dfrac{z^2}{2EI_{xx}} & -\dfrac{z^3}{6EI_{xx}} & \overline{v}_x(z) \\ 0 & 1 & \dfrac{z}{EI_{xx}} & -\dfrac{z^2}{2EI_{xx}} & \overline{v}'_x(z) \\ 0 & 0 & 1 & -z & \overline{M}_y(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \overline{T}_x(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x(o) \\ v'_x(o) \\ M_y(o) \\ T_x(o) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\overline{T}_x(z) = -\int_0^z q_x(t)\,dt$$

$$\overline{M}_y(z) = -\int_0^z [\overline{T}_x(t) + \gamma_y(t)]\,dt$$

$$\bar{v}'_x\ (z) = \frac{1}{EI_{xx}} \int_0^z \overline{M}_y\,(t)\,dt$$

$$\bar{v}_x\ (z) = \int_0^z \bar{v}'_x\,(t)\,dt$$

1.22 *Flexion dans le plan principal* C_{yz}

On a cette fois :

$$\frac{d\ T_y}{dz}(z) = -\,q_y\,(z)$$

$$\frac{d\,M_x}{dz}(z) = +\,T_y\,(z) - \gamma_x\,(z)$$

$$\frac{d^2\ v_y}{dz^2}(z) = -\,\frac{M_x}{EI_{yy}}(z)$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} v_y\ (z) \\ v'_y\ (z) \\ M_x\,(z) \\ T_y\ (z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & -\dfrac{z^2}{2\,EI_{yy}} & -\dfrac{z^3}{6\,EI_{yy}} & \bar{v}_y\ (z) \\ 0 & 1 & -\dfrac{z}{EI_{yy}} & -\dfrac{z^2}{2\,EI_{yy}} & \bar{v}'_y\ (z) \\ 0 & 0 & 1 & +\,z & \overline{M}_x\,(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \overline{T}_y\ (z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_y\ (0) \\ v'_y\ (0) \\ M_x\,(0) \\ T_y\ (0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\overline{T}_y\ (z) = -\int_0^z q_y\,(t)\,dt$$

$$\overline{M}_x\,(z) = \int_0^z \left[\overline{T}_y\,(t) - \gamma_x\,(t)\right] dt$$

$$\bar{v}'_y\ (z) = -\,\frac{1}{EI_{xx}} \int_0^z \overline{M}_x\,(t)\,dt$$

$$\bar{v}_y\ (z) = \int_0^z \bar{v}'_y\,(t)\,dt$$

1.3. Sous-matrice - transfert de torsion

L'équation différentielle de torsion s'écrit :

$$EJ_\omega \cdot \theta^{IV}\,(z) - GJ_d\,\theta^{II}\,(z) = m\,(z) + \frac{db}{dz}(z)$$

$$\Leftrightarrow\ \theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2}\,\theta^{II} = \frac{1}{EJ_\omega}\left[m\,(z) + b'\,(z)\right] \qquad (1)$$

avec $k^2 = l^2\,\dfrac{GJ_d}{EJ_\omega}$ (l : longueur du tronçon étudié).

La solution $\theta\,(z)$ cherchée peut se mettre sous la forme :

$$\theta\,(z) = \theta_0\,(z) + \bar{\theta}\,(z) \qquad (2)$$

avec : $\theta_0\,(z)$: solution générale de (1) sans deuxième membre.
$\bar{\theta}\ (z)$: solution particulière de (1).

Nous choisirons $\bar{\theta}\,(z)$ telle que :

$$\bar{\theta}\,(0) = \bar{\theta}'\,(0) = \bar{\theta}''\,(0) = \bar{\theta}'''\,(0) = 0 \qquad (3)$$

Il est possible de montrer que $\bar{\theta}\,(z)$ ainsi définie a pour expression :

$$\bar{\theta}\,(z) = \frac{1}{GJ_d} \int_0^z \left[\frac{l}{k}\,sh\,\frac{k}{l}\,(z-u) - (z-u)\right] \cdot \left[m\,(u) + b'\,(u)\right] du$$

Par dérivations de $\bar{\theta}(z)$ nous introduisons :

$$\bar{\theta}'(z) = \frac{d\bar{\theta}}{dz}(z)$$

$$\bar{H}(z) = GJ_d \frac{d\bar{\theta}}{dz}(z) - EJ_\omega \frac{d^3\bar{\theta}}{dz^3}(z)$$

$$\bar{B}(z) = -EJ_\omega \frac{d^2\bar{\theta}}{dz^2}(z)$$

La solution générale de (1) sans second membre a pour expression :

$$\theta_0(z) = a_1 + a_2 z + a_3 sh\frac{k}{l}z + a_4 ch\frac{k}{l}z$$

En utilisant les relations (2) et (3) nous pouvons écrire :

$$\theta(0) = \theta_0(0) = a_1 + a_4$$

$$\theta'(0) = \theta'_0(0) = a_2 + \frac{k}{l}a_3$$

$$B(0) = -EJ_\omega \cdot \theta''(0) = -EJ_\omega \cdot \theta''_0(0) = -GJ_d \cdot a_4$$

$$H(0) = GJ_d \cdot \theta'(0) - EJ_\omega \cdot \theta'''(0) = GJ_d \cdot \theta'_0(0) - EJ_\omega \cdot \theta'''_0(0) = GJ_d \cdot a_2$$

La résolution de ce système donne les expressions de a_1, a_2, a_3, a_4 en fonction de $\theta(0)$, $\theta'(0)$, $B(0)$ et $H(0)$.

Finalement, tous calculs faits, nous obtenons l'expression complète de $\theta(z)$:

$$\theta(z) = \theta(0) + \theta'(0) \cdot \frac{l}{k} sh\frac{k}{l}z + \frac{B(0)}{GJ_d}\left(1 - ch\frac{k}{l}z\right) + \frac{H(0)}{GJ_d}\left(z - \frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z\right) + \bar{\theta}(z)$$

$\theta'(z)$, $B(z)$ et $H(z)$ s'obtiennent par dérivations. D'où la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta(z) \\ \theta'(z) \\ B(z) \\ H(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z & \left(1 - ch\frac{k}{l}z\right)/GJ_d & \left(z - \frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z\right)/GJ_d & \bar{\theta}(z) \\ 0 & ch\frac{k}{l}z & \left(-\frac{k}{l}sh\frac{k}{l}z\right)/GJ_d & \left(1 - ch\frac{k}{l}z\right)/GJ_d & \bar{\theta}'(z) \\ 0 & \left(-\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z\right)GJ_d & ch\frac{k}{l}z & \frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z & \bar{B}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{H}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \\ B(0) \\ H(0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.4. **Sous-matrice - transfert de compression simple**

Soient m le nombre de voiles et j l'un de ces voiles ($1 \leqslant j \leqslant m$).

Nous avons :

$$\frac{dN_j}{dz}(z) = -p_j(z) \qquad \text{(équilibre)}$$

$$\frac{du_j}{dz}(z) = \frac{N_j}{E_j S_j}(z) \qquad \text{(élasticité linéaire)}$$

D'où :

$$N_j(z) = N_j(0) - \int_0^z p_j(t)\,dt = N_j(0) + \bar{N}_j(z)$$

$$u_j(z) = u_j(0) + \frac{N_j(0)}{E_j S_j}z + \int_0^z \frac{\bar{N}_j(t)}{E_j S_j}dt = u_j(0) + \frac{N_j(0)}{E_j S_j}z + \bar{u}_j(z)$$

S_j étant la surface du voile j.

Nous pouvons écrire ces 2 m relations linéaires sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_1(z) \\ N_1(z) \\ \vdots \\ u_j(z) \\ N_j(z) \\ \vdots \\ u_m(z) \\ N_m(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{E_1 S_1} & & & & \bar{u}_1(z) \\ & 1 & & & & \bar{N}_1(z) \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & \frac{z}{E_j S_j} & & \bar{u}_j(z) \\ & & & 1 & & \bar{N}_j(z) \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \quad \frac{z}{E_m S_m} & \bar{u}_m(z) \\ & & & & 1 & \bar{N}_m(z) \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1(0) \\ N_1(0) \\ \vdots \\ u_j(0) \\ N_j(0) \\ \vdots \\ u_m(0) \\ N_m(0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.5. Matrice - transfert globale d'un tronçon régulier sans linteaux

Nous avons établi successivement les sous-matrices transfert de flexion, torsion et compression simple d'un tronçon régulier sans linteaux. La matrice transfert globale se déduit évidemment par « empilement » de ces différentes sous-matrices, que nous avons ordonnées de la façon suivante :

- flexion dans les plans Cxz puis Cyz ;
- torsion autour de $\overrightarrow{Cz}$;
- compression simple dans les m voiles.

Le vecteur état à la cote z correspondant, E (z), a ainsi pour expression :

$$E(z) = (v_x, v'_x, M_y, T_x, v_y, v'_y, M_x, T_y, \theta, \theta', B, H, u_1, N_1, \ldots, u_j, N_j, \ldots u_m, N_m, 1)(z)$$

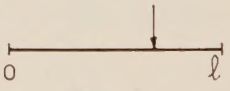
La relation matricielle donne l'expression de E (z) en fonction de E (0), vecteur-état à la base du tronçon étudié.

Les termes de la dernière colonne sont les termes de charge, et se calculent à partir d'intégrales d'ordre 1, 2 3 ou 4 des diverses densités de charge appliquées au tronçon. Nous les expliciterons dans le paragraphe suivant.

1.6. Termes de charge

Nous allons établir leurs expressions pour les deux types suivants de densités de charge :

1) charge concentrée ;



2) densité trapézoïdale sur une zone.

Passage d'un tronçon régulier $(0, z)$ **:**

$$
\begin{bmatrix}
v_x(z) \\ v'_x(z) \\ M_y(z) \\ T_x(z) \\ v_y(z) \\ v'_y(z) \\ M_x(z) \\ T_y(z) \\ \theta(z) \\ \theta'(z) \\ B(z) \\ H(z) \\ \vdots \\ u_j(z) \\ N_j(z) \\ \vdots \\ 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & z & \frac{z^2}{2\,EI_{xx}} & -\frac{z^3}{6\,EI_{xx}} & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & \frac{z}{EI_{xx}} & -\frac{z^2}{2\,EI_{xx}} & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & -z & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & z & -\frac{z^2}{2\,EI_{yy}} & -\frac{z^3}{6\,EI_{yy}} & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & -\frac{z}{EI_{yy}} & -\frac{z^2}{2\,EI_{yy}} & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & +z & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z & \left(1-ch\frac{k}{l}z\right)\Big/GJ_d & \left(z-\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z\right)\Big/GJ_d & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & ch\frac{k}{l}z & -\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z/GJ_d & \left(1-ch\frac{k}{l}z\right)\Big/GJ_d & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & -GJ_d\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z & ch\frac{k}{l}z & \frac{l}{k}sh\frac{k}{l}z & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & \frac{z}{E_j S_j} & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
\bar{v}_x(z) \\ \bar{v}'_x(z) \\ \overline{M}_y(z) \\ \overline{T}_x(z) \\ \bar{v}_y(z) \\ \bar{v}'_y(z) \\ \overline{M}_x(z) \\ \overline{T}_y(z) \\ \bar{\theta}(z) \\ \bar{\theta}'(z) \\ \overline{B}(z) \\ \overline{H}(z) \\ \vdots \\ \bar{u}_j(z) \\ \overline{N}_j(z) \\ \vdots \\ 1
\end{bmatrix}
\quad l \leqslant j \leqslant m
$$

$$
\begin{bmatrix}
v_x(0) \\ v'_x(0) \\ M_y(0) \\ T_x(0) \\ v_y(0) \\ v'_y(0) \\ M_x(0) \\ T_y(0) \\ \theta(0) \\ \theta'(0) \\ B(0) \\ H(0) \\ \vdots \\ u_j(0) \\ N_j(0) \\ \vdots \\ 1
\end{bmatrix}
$$

1.61. *Flexion dans le plan Cxz*

Les expressions de $\overline{T}_x(z)$, $\overline{M}_y(z)$, $\overline{v}'_x(z)$ et $\overline{v}_x(z)$ en fonction de $q_x(t)$ et $\gamma_y(t)$ sont données en 1.2.

α) Charge transversale Q_x concentrée à la cote t :

Nous avons :

$$\begin{cases} q_x(z) = Q_x \cdot \delta(z - t) \\ \gamma_y(z) = 0 \end{cases}$$

($\delta(z - t)$ est la fonction de Dirac au point t).

Par intégration successive, nous obtenons :
($Y(z - t)$ est la fonction de Heaviside au point t.
Sa dérivée est $\delta(z - t)$) :

$$\begin{cases} \overline{T}_x(z) = -Q_x \cdot Y(z - t) \\ \overline{M}_y(z) = Q_x(z - t) \cdot Y(z - t) \\ \overline{v}'_x(z) = \dfrac{1}{2\,EI_{xx}} \cdot (z - t)^2 \cdot Y(z - t) \\ \overline{v}_x(z) = \dfrac{1}{6\,EI_{xx}} \cdot (z - t)^3 \cdot Y(z - t) \end{cases}$$

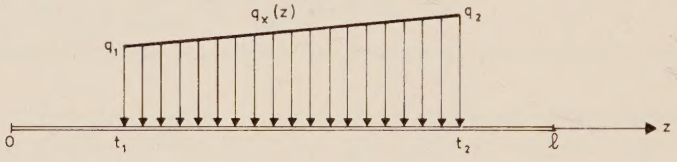
β) Moment M_y concentré à la cote t :

$$\begin{cases} q_x(z) = 0 \\ \gamma_y(z) = M_y \cdot \delta(z - t) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \overline{T}_x(z) = 0 \\ \overline{M}_y(z) = -M_y \cdot Y(z - t) \\ \overline{v}'_x(z) = -M_y \cdot (z - t) \cdot Y(z - t)/EI_{xx} \\ \overline{v}_x(z) = -M_y \cdot (z - t)^2 \cdot Y(z - t)/2\,EI_{xx} \end{cases}$$

γ) Charge transversale $q_x(z)$ trapézoïdale sur une zone :



On a :

$$q_x(z) = (\alpha z + \beta)\,[Y(z - t_1) - Y(z - t_2)]$$

avec :

$$\alpha = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{q_1 t_2 - q_2 t_1}{t_2 - t_1}$$

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \overline{T}_x(z) = \overline{T}_x(z, t_2) - \overline{T}_x(z, t_1) \\ \overline{M}_y(z) = \overline{M}_y(z, t_2) - \overline{M}_y(z, t_1) \\ \overline{v}'_x(z) = \overline{v}'_x(z, t_2) - \overline{v}'_x(z, t_1) \\ \overline{v}_x(z) = \overline{v}_x(z, t_2) - \overline{v}_x(z, t_1) \end{cases}$$

Avec :

$$\overline{T}_x(z, t_i) = -Y(z - t_i)\left[\frac{\alpha}{2} \cdot (z^2 - t_i^2) + \beta \cdot (z - t_i)\right]$$

$$\overline{M}_y(z, t_i) = +Y(z - t_i)\left[\frac{\alpha}{6} \cdot (z^3 - t_i^3) - \frac{\alpha}{2} \cdot t_i^2 (z - t_i) + \frac{\beta}{2} \cdot (z - t_i)^2\right]$$

$$\overline{v}'_x(z, t_i) = \frac{Y(z - t_i)}{EI_{xx}}\left[\frac{\alpha}{24}(z^4 - t_i^4) - \frac{\alpha}{6} \cdot t_i^3 (z - t_i) - \frac{\alpha}{4} \cdot t_i^2 (z - t_i)^2 + \frac{\beta}{6} \cdot (z - t_i)^3\right]$$

$$\overline{v}_x(z, t_i) = \frac{Y(z - t_i)}{EI_{xx}}\left[\frac{\alpha}{120}(z^5 - t_i^5) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{24}(z - t_i)\,t_i^4 - \frac{\alpha}{12}(z - t_i)^2\,t_i^3 - \frac{\alpha}{12}(z - t_i)^3\,t_i^2 + \frac{\beta}{24}(z - t_i)^4\right]$$

δ) **Densité de moment $\gamma_y(z)$ trapézoïdale sur une zone :**

L'expression de $\gamma_y(z)$ est analogue à celle de $q_x(z)$ trouvée dans le paragraphe précédent.

Nous aurons cette fois :

$$\overline{T}_x(z,t) = 0$$

$$\overline{M}_y(z,t_i) = -Y(z,t_i)\left[\frac{\alpha}{2}\cdot(z^2-t_i^2)+\beta\cdot(z-t_i)\right]$$

$$\bar{v}'_x(z,t_i) = -\frac{Y(z,t_i)}{EI_{xx}}\left[\frac{\alpha}{6}\cdot(z^3-t_i^3)-\frac{\alpha}{2}\cdot t_i^2(z-t_i)+\frac{\beta}{2}\cdot(z-t_i)^2\right]$$

$$\bar{v}_x(z,t_i) = -\frac{Y(z,t_i)}{EI_{xx}}\left[\frac{\alpha}{24}\cdot(z^4-t_i^4)-\frac{\alpha}{6}\cdot(z-t_i)\cdot t_i^3-\frac{\alpha}{4}\cdot t_i^2(z-t_i)^2+\frac{\beta}{6}\cdot(z-t_i)^3\right]$$

1.62. *Flexion dans le plan Cyz*

Nous avons vu en 1.22 que les formules relatives à la flexion dans le plan C_{yz}'' diffèrent par quelques signes de leurs homologues dans le plan C_{xz}''. Il en va donc de même pour les expressions des termes de charge, que le lecteur saura retrouver, s'il le désire, à partir des résultats ci-dessus.

1.63. *Termes de charge de torsion*

L'expression générale de $\overline{\theta}(z)$ a été établie en 1.3 :

$$\overline{\theta}(z) = \frac{1}{GJ_d}\int_0^z\left[\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}(z-u)-(z-u)\right]\cdot\left[m(u)+\frac{db}{dz}(u)\right]\cdot du$$

$\overline{\theta}'(z)$, $\overline{B}(z)$ et $\overline{H}(z)$ se déduisent de $\overline{\theta}(z)$ par dérivation.

α) **Moment de torsion H_t concentré en t :**

$$m(z) = H_t\cdot\delta(z-t) \qquad \text{et} \qquad b(z) = 0$$

Or, $\forall f(z)$ continue en z, $\int_0^z f(u)\cdot\delta(u-t)\,du = Y(z-t)f(t)$.

D'où :

$$\overline{\theta}(z) = H_t\frac{Y(z-t)}{GJ_d}\left[\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}(z-t)-(z-t)\right]$$

$$\overline{\theta}'(z) = H_t\frac{Y(z-t)}{GJ_d}\left[ch\frac{k}{l}(z-t)-1\right]$$

$$\overline{B}(z) = H_t\,Y(z-t)\left[-\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}(z-t)\right]$$

$$\overline{H}(z) = -H_t\,Y(z-t)$$

β) **Bimoment B_t concentré à la cote t :**

$$m(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad b(z) = B_t\cdot\delta(z-t)$$

D'où :
$$\overline{\theta}(z) = \frac{B_t}{GJ_d}\int_0^z\left[\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}(z-u)-(z-u)\right]\cdot\delta'(u-t)\cdot du$$

$\delta'(z-t)$ est la dérivée au sens des distributions de la fonction de Dirac $\delta(z-t)$ et est caractérisée par $\forall f(z)$ dérivable en t :

$$\int_0^z f(u)\cdot\delta'(u-t)\,du = f(z)\cdot\delta(z-t)\Big|_0^z - \int_0^z f'(u)\cdot\delta(z-u)\,du$$
$$= -f'(t)\cdot Y(z-t)$$

Par conséquent :

$$\overline{\theta}(z) = -\frac{B_t}{GJ_d}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l}{k}sh\frac{k}{l}(z-u)-(z-u)\right)_{(t)}\cdot Y(z-t)$$

$$= B_t\cdot\frac{Y(z-t)}{GJ_d}\left(ch\frac{k}{l}(z-t)-1\right)$$

$$\overline{\theta}'(z) = B_t\cdot\frac{Y(z-t)}{GJ_d}\left(sh\frac{k}{l}(z-t)\right)$$

$$\overline{B}(z) = -B_t\cdot Y(z-t)\left(ch\frac{k}{l}(z-t)\right)$$

$$\overline{H}(z) = 0$$

γ) **Densité trapézoïdale de moment de torsion :**

$$m(z) = (\alpha z + \beta) \cdot [Y(z - t_1) - Y(z - t_2)]$$

avec : $\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1}$ et $\beta = \dfrac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1}$

Après intégration, on obtient $\bar{\theta}(z) = \bar{\theta}(z, t_2) - \bar{\theta}(z, t_1)$ avec :

$$\bar{\theta}(z, t) = \frac{Y(z - t)}{GJ_d}\left\{(\alpha z + \beta) \cdot \left[\frac{l^2}{k^2} + \frac{(z - t)^2}{2} - \frac{l^2}{k^2} ch \frac{k}{l}(z - t)\right]\right.$$

$$\left. - \alpha \cdot \left[\frac{(z - t)^3}{3} + \frac{l^3}{k^3} sh \frac{k}{l}(z - t) - (z - t)\frac{l^2}{k^2} ch \frac{k}{l}(z - t)\right]\right\}$$

$\bar{\theta}'(z)$, $\bar{B}(z)$ et $\bar{H}(z)$ s'obtiennent par dérivations de $\bar{\theta}(z)$.

Il est commode de les mettre sous la forme $\varphi(z, t_2) - \varphi(z, t_1)$.

Tous calculs faits, il vient :

$$\bar{\theta}'(z, t) = \frac{Y(z - t)}{GJ_d}\left\{\beta \cdot \left[(z - t) - \frac{l}{k} sh \frac{k}{l}(z - t)\right]\right.$$

$$\left. - \alpha \cdot \left[\frac{l^2}{k^2}\left(ch \frac{k}{l}(z - t) - 1\right) - \frac{z^2 - t^2}{2} + \frac{l}{k} t\, sh \frac{k}{l}(z - t)\right]\right\}$$

$$\bar{B}(z, t) = \frac{l^2}{k^2} \cdot Y(z - t) \cdot \left\{\beta \left[ch \frac{k}{l}(z - t) - 1\right] - \alpha \left[z - t\, ch \frac{k}{l}(z - t) - \frac{l}{k} sh \frac{k}{l}(z - t)\right]\right\}$$

$$\bar{H}(z, t) = Y(z - t)\left[\frac{\alpha}{2}(z^2 - t^2) + \beta(z - t)\right]$$

δ) **Densité trapézoïdale de bimoment :**

Les calculs sont analogues à ceux que nous venons de développer.

Nous n'en donnerons que les résultats :

$$\bar{\theta}(z, t) = -\frac{Y(z - t)}{GJ_d} \cdot \left\{\beta \cdot \left[z - t - \frac{l}{k} sh \frac{k}{l}(z - t)\right] - \alpha \left[\frac{l^2}{k^2}\left(ch \frac{k}{l}(z - t) - 1\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{z^2 - t^2}{2} + t \frac{l}{k} sh \frac{k}{l}(z - t)\right]\right\}$$

$$\bar{\theta}'(z, t) = +\frac{Y(z - t)}{GJ_d} \cdot \left\{\beta \left[ch \frac{k}{l}(z - t) - 1\right] - \alpha \left[z - t\, ch \frac{k}{l}(z - t) - \frac{l}{k} sh \frac{k}{l}(z - t)\right]\right\}$$

$$\bar{B}(z, t) = -Y(z - t) \cdot \frac{l}{k}\left\{\beta\, sh \frac{k}{l}(z - t) + \alpha \left[t\, sh \frac{k}{l}(z - t) - \frac{l}{k}\left(1 - ch \frac{k}{l}(z - t)\right)\right]\right\}$$

$$\bar{H}(z, t) = 0$$

1.64. *Termes de charge de compression simple*

α) **Charge longitudinale de P_j concentrée à la cote t :**

On a alors $p_j(z) = P_j \cdot \delta(z - t)$.

D'où :

$$\bar{N}_j(z) = -P_j \cdot Y(z - t)$$

$$\bar{u}_j(z) = -\frac{P_j}{E_j S_j}(z - t) \cdot Y(z - t)$$

β) **Densité trapézoïdale d'effort longitudinal :**

$p_j(z)$ est de la forme : $p_j(z) = (\alpha z + \beta) \cdot [Y(z - t_1) - Y(z - t_2)]$.

Mettant $\bar{N}_j(z)$ et $\bar{u}_j(z)$ sous la forme :

$$\bar{\varphi}(z) = \bar{\varphi}(z, t_2) - \bar{\varphi}(z, t_1)$$

nous obtenons, tous calculs faits :

$$\bar{N}_j(z, t) = Y(z - t) \cdot \left(\alpha \cdot \frac{z^2 - t^2}{2} + \beta(z - t)\right)$$

$$\bar{u}_j(z, t) = \frac{Y(z - t)}{E_j S_j} \cdot \left(\alpha \frac{z^3 - t^3}{6} - \alpha \cdot \frac{t^2(z - t)}{2} + \beta \frac{(z - t)^2}{2}\right)$$

CHAPITRE II

TRAITEMENT MATRICIEL DES SINGULARITES

2.1. Matrice transfert de passage d'un niveau à linteaux

Soit t la cote d'un niveau à linteaux. Nous supposerons pour le moment que ce niveau ne présente pas de discontinuités de section. Nous allons dans ce paragraphe introduire une matrice transfert de passage de niveau à linteaux, $\mathcal{M}_L$, reliant $E(t^+)$ à $E(t^-)$: $E(t^+) = \mathcal{M}_L \circ E(t^-)$.

Soient :

k : indice d'un des linteaux du niveau de cote t ($1 \leqslant k \leqslant n$, n étant le nombre de linteaux à ce niveau).

k_1 et k_2 : indices des deux voiles reliés par le linteau k (éventuellement, $k_1 = k_2$). Par convention, l'encastrement sur k_1 sera l'origine du linteau, celui sur k_2 son extrémité.

G_{k1} et G_{k2} : centres de gravité des voiles k_1 et k_2.

M_k : le point de milieu de travée du linteau k.

M_{k1} (ou M_{k2}) : après coupure du linteau k en M_k, le point M_k considéré comme appartenant au voile k_1 (ou k_2).

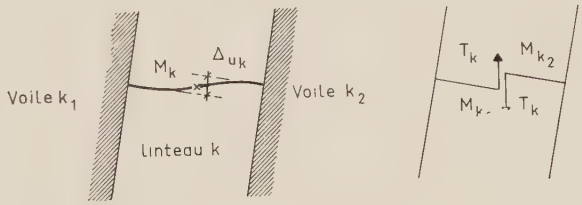
R_k : raideur du linteau k (calculée éventuellement en tenant compte de la *distorsion*, ou à partir d'une portée augmentée fictivement d'une fraction de la hauteur du linteau, afin de tenir compte de façon approchée des *déformations localisées des encastrements*).

Dans la suite de ce paragraphe (x, y, ω) seront des coordonnées généralisées principales relatives au tronçon dans lequel se trouve le niveau t.

Soit T_k l'effort tranchant dans le linteau k. Nous en fixons le signe en posant :

$$T_k = R_k [u(M_{k1}, t) - u(M_{k2}, t)]$$

Fig. 2. — **Déformation du linteau k.**



M_k étant point d'inflexion, une coupure en M_k ne libère que deux efforts verticaux :

$$\left| \begin{array}{l} -\, T_k \cdot \vec{k} \text{ en } M_{k1} \\ +\, T_k \cdot \vec{k} \text{ en } M_{k2} \end{array} \right.$$

($\vec{k}$ vecteur unitaire de $\overrightarrow{Cz}$, dirigé vers le haut).

L'action résistante du linteau se ramène donc à l'application à la section de cote t des efforts suivants :

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\Delta M_k} = -\, T_k \cdot \vec{k} \wedge \overrightarrow{M_{k1} G_{k1}} + T_k \cdot \vec{k} \wedge \overrightarrow{M_{k2} G_{k2}} = T_k \cdot \vec{k} \wedge \overrightarrow{G_{k1} G_{k2}} \\ \overrightarrow{\Delta B_k} = T_k \cdot [\omega(M_{k2}) - \omega(M_{k1})] \\ \overrightarrow{\Delta N_{k1}} = -\, T_k \cdot \vec{k} \text{ en } G_{k1} \\ \overrightarrow{\Delta N_{k2}} = +\, T_k \cdot \vec{k} \text{ en } G_{k2} \end{array} \right.$$

Nous en déduisons, en prenant en compte les n linteaux :

$$\left| \begin{array}{l} M_x(t^+) = M_x(t^-) + \sum_k [y(G_{k2}) - y(G_{k1})] \cdot T_k \\ M_y(t^+) = M_y(t^-) - \sum_k [x(G_{k2}) - x(G_{k1})] \cdot T_k \\ B\ (t^+) = B\ (t^-) - \sum_k [\omega(M_{k2}) - \omega(M_{k1})] \cdot T_k \\ N_j(t^+) = N_j(t^-) + \sum_k \varepsilon_k^j \cdot T_k \end{array} \right.$$

(avec $\varepsilon_k^j = +1$ (resp. -1) si le linteau k a son origine (resp. extrêmité) sur le voile j, et 0 dans les autres cas).

Or : $T_k = R_k \cdot [u(M_{k1}, t) - u(M_{k2}, t)]$ avec pour $i = 1, 2$

$$u(M_{ki}, t) = u_{ki}(t) - [x(M_{ki}) - x(G_{ki})] \cdot v'_x(t) - [y(M_{ki}) - y(G_{ki})] \cdot v'_y(t) - \omega(M_{ki}) \cdot \theta'(t)$$

D'où :

$$T_k(t) = R_k \cdot \{u_{k1}(t) - u_{k2}(t) - [x(G_{k2}) - x(G_{k1})] \cdot v'_x(t) - [y(G_{k2}) - y(G_{k1})] \cdot v'_y(t) - [\omega(M_{k1}) - \omega(M_{k2})] \cdot \theta'(t)\}$$

Posons :

$$\Delta x_{Gk} = x(G_{k2}) - x(G_{k1})$$
$$\Delta y_{Gk} = y(G_{k2}) - y(G_{k1})$$
$$\Delta \omega_k = \omega(M_{k2}) - \omega(M_{k1})$$

$$\Delta_{xx} = \sum_k R_k \cdot (\Delta x_{Gk})^2 \qquad \Delta_{yy} = \sum_k R_k (\Delta y_{Gk})^2$$

$$\Delta_{\omega\omega} = \sum_k R_k \cdot (\Delta \omega_k)^2 \qquad \Delta_{xy} = \sum_k R_k \Delta x_{Gk} \cdot \Delta y_{Gk}$$

$$\Delta_{x\omega} = \sum_k R_k \cdot \Delta x_{Gk} \cdot \Delta \omega_k \qquad \Delta_{y\omega} = \sum_k R_k \Delta y_{Gk} \cdot \Delta \omega_k$$

$$\Delta_{xj} = \sum_k R_k \cdot \Delta x_{Gk} \cdot \varepsilon_k^j \qquad \Delta_{yj} = \sum_k R_k \Delta y_{Gk} \cdot \varepsilon_k^j$$

$$\Delta_{\omega j} = \sum_k R_k \cdot \Delta \omega_k \cdot \varepsilon_k^j \qquad \Delta_{ij} = \sum_k R_k \cdot \varepsilon_k^i \varepsilon_k^j$$

Tenant compte du fait que $v'_x(z)$, $v'_y(z)$, $\theta'(z)$ et $u_j(z)$ sont continues en t et que par suite leurs valeurs en t^+ sont aussi leurs valeurs en t^-, nous obtenons après calculs :

$$\begin{bmatrix} M_x(t^+) \\ M_y(t^+) \\ B(t^+) \\ N_j(t^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x(t^-) \\ M_y(t^-) \\ B(t^-) \\ N_j(t^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta_{xy} & -\Delta_{yy} & +\Delta_{y\omega} & +\Delta_{yi} \\ +\Delta_{xx} & +\Delta_{xy} & -\Delta_{x\omega} & -\Delta_{xi} \\ +\Delta_{x\omega} & +\Delta_{y\omega} & -\Delta_{\omega\omega} & -\Delta_{\omega i} \\ -\Delta_{xi} & -\Delta_{yi} & +\Delta_{\omega i} & +\Delta_{ij} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v'_x(t^-) \\ v'_y(t^-) \\ \theta'(t^-) \\ u_i(t^-) \end{bmatrix}$$

L'expression de la matrice transfert $\mathcal{M}_L$ reliant $E(t^+)$ à $E(t^-)$ se déduit directement de la relation matricielle ci-dessus (les paramètres de $E(z)$ autres que $M_x(z)$, $M_y(z)$, $B(z)$ et $N_j(z)$ restant inchangés au passage du niveau t).

2.2. Matrice transfert de discontinuité de section

Soit t la cote d'un niveau présentant une discontinuité de section. Nous allons construire une matrice $\mathcal{M}_S$ telle que $E(t^+) = \mathcal{M}_S \circ E(t^-)$.

Cette discontinuité de section correspond à un changement brusque des caractéristiques mécaniques ou géométriques des voiles. Nous exclurons les cas où certains voiles se dédoublent ou, au contraire, se rassemblent en un seul voile. Nous exclurons aussi les cas où certains voiles disparaissent. Nous supposerons de plus que le niveau t ne comporte pas de linteaux. Nous verrons, dans le prochain chapitre, comment traiter malgré tout ces trois types de cas particuliers.

Soit m le nombre de voiles. Nous donnerons l'indice 1 (resp. 2) aux grandeurs relatives à la section située juste au-dessous (resp. au-dessus) de la section t.

2.21. *Transformation des composantes géométriques de E (z)*

Pour des raisons de continuité de la matière :

$$\theta(t^+) = \theta(t^-)$$
$$\theta'(t^+) = \theta'(t^-)$$

[cette continuité de $\theta'(z)$ en t n'est pas assurée lorsque la structure étudiée se déforme en torsion pure ($EJ_\omega = 0$). Cette particularité ne se rencontre que pour les structures du type faisceau de voiles plans, qui ne sont pas utilisées en contreventement].

Pour $v_x(z)$, $v'_x(z)$, $v_y(z)$ et $v'_y(z)$ le problème se ramène à un changement de repères principaux :

(C_1, x_1, y_1, z) en t^- et (C_2, x_2, y_2, z) en t^+

Tous calculs faits, on trouve :

$$\left| \begin{array}{l} v_x(t^+) = +\, v_x(t^-)\cos\alpha + v_y(t^-)\sin\alpha + y_2(C_1)\cdot\theta(t^-) \\ v_y(t^+) = -\, v_x(t^-)\sin\alpha + v_y(t^-)\cos\alpha - x_2(C_1)\cdot\theta(t^-) \end{array} \right.$$

(formules analogues pour v'_x et v'_y).

$$\alpha = (\overrightarrow{C_1 x_1}, \overrightarrow{C_2 x_2})$$

Transformation des $u_j(z)$:

Dans le cas général, il n'y a pas conservation, au passage de la cote t, du déplacement longitudinal **d'ensemble** $u_j(z)$ du voile j.

Cette discontinuité de $u_j(z)$ à la cote t correspond pour le voile j à un changement de position soit du centre de gravité, soit du point sectoriel initial principal. Pour traiter ce second cas, nous allons introduire, pour chaque voile j, un point particulier dit « point de référence du voile j », noté R_j et défini de la façon suivante :

R_j est choisi parmi les points appartenant en projection à toutes les sections successives du voile j. On connaît son abscisse et son ordonnée dans le repère général (0 X Y Z), et son aire sectorielle principale dans chacun des tronçons du système de contreventement (fig. 3).

La continuité de la matière impose $u_j(R_j, t^+) = u_j(R_j, t^-)$. On peut montrer que cette condition assure la continuité de la matière pour tous les autres points du voile j.

$$\begin{aligned} u_j(R_j, t^+) = u_j(t^+) &- v'_x(t^+)\cdot[x_2(R_j) - x_2(G_{j2})] \\ &- v'_y(t^+)\cdot[y_2(R_j) - y_2(G_{j2})] \\ &- \theta'(t^+)\cdot\omega_2(R_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_j(R_j, t^-) = u_j(t^-) &- v'_x(t^-)\cdot[x_1(R_j) - x_1(G_{j1})] \\ &- v'_y(t^-)\cdot[y_1(R_j) - y_1(G_{j1})] \\ &- \theta'(t^-)\cdot\omega_1(R_j) \end{aligned}$$

Après transformation, $u_j(R_j, t^+) = u_j(R_j, t^-)$ conduit à :

$$\begin{aligned} u_j(t^+) = u_j(t^-) &- [x_1(G_{j2}) - x_1(G_{j1})]\cdot v'_x(t^-) \\ &- [y_1(G_{j2}) - y_1(G_{j1})]\cdot v'_y(t^-) - \Omega_j\cdot\theta'(t^-) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_j = \omega_1(R_j) &- \omega_2(R_j) \\ &+ [y_1(C_2) - y_1(C_1)]\cdot[x_1(R_j) - x_1(G_{j2})] \\ &- [x_1(C_2) - x_1(C_1)]\cdot[y_1(R_j) - y_1(G_{j2})] \end{aligned}$$

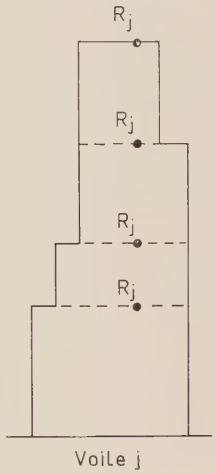


Fig. 3. — **Définition du « point de référence du voile j », R_j.**

2.22. *Transformation des efforts internes*

Soient :

S_{j1} (resp. S_{j2}) la section du voile j pour $z < t$ (resp. $z > t$).
$\sigma_j(s)$ (resp. $\tau_j(s)$) la contrainte normale (resp. le flux de cisaillement) appliquée par S_{j2} sur S_{j1}, au point M (s) de $S_{j1} \cap S_{j2}$ ($\sigma_j(s)$ et $\tau_j(s)$ sont nuls en dehors de $S_{j1} \cap S_{j2}$).

α) **Efforts normaux :**

$$N_j(t^+) = \int_{S_{j1}\cap S_{j2}} \sigma_j(s)\cdot dF = N_j(t^-)$$

β) **Moments de flexion :**

Les intégrations ci-dessous se font sur $S_{j1} \cap S_{j2}$.

Nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} M_x(t^+) = +\sum_j \int \sigma_j(s)\cdot[y_2(M) - y_2(G_{j2})]\cdot dF \\ M_y(t^+) = -\sum_j \int \sigma_j(s)\cdot[x_2(M) - x_2(G_{j2})]\cdot dF \end{array} \right.$$

(formules analogues pour $M_x(t^-)$ et $M_y(t^-)$).

Tenant compte de :

$$\left| \begin{array}{l} x_2(M) = +\, x_1(M)\cos\alpha + y_1(M)\sin\alpha + x_2(C_1) \\ y_2(M) = -\, x_1(M)\sin\alpha + y_1(M)\cos\alpha + y_2(C_1) \end{array} \right.$$

Nous obtenons finalement avec :

$$\alpha = (\overrightarrow{C_1 x_1}, \overrightarrow{C_2 x_2})$$

$$\left| \begin{array}{l} M_x(t^+) = + M_x(t^-)\cos\alpha + M_y(t^-)\sin\alpha - \sum_j [y_2(G_{j2}) - y_2(G_{j1})] \cdot N_j(t^-) \\ M_y(t^+) = - M_x(t^-)\sin\alpha + M_y(t^-)\cos\alpha + \sum_j [x_2(G_{j2}) - x_2(G_{j1})] \cdot N_j(t^-) \end{array} \right.$$

γ) **Bimoment :**

$$\forall M(s) \in S_{j1} \cap S_{j2},\ \omega_2(M) = \omega_1(M) + [y_1(C_2) - y_1(C_1)] \cdot x_1(s) - [x_1(C_2) - x_1(C_1)] \cdot y_1(s) + \gamma_j$$

(γ_j est une constante dépendant de j et exprimant le changement de point sectoriel initial principal).

En appliquant la relation ci-dessus à R_j on trouve :

$$\gamma_j = \omega_2(R_j) - \omega_1(R_j) - [y_1(C_2) - y_1(C_1)] \cdot x_1(R_j) + [x_1(C_2) - x_1(C_1)] \cdot y_1(R_j)$$

Or : $$B(t^+) = \sum_j \int \sigma(s) \cdot \omega_2(s) \cdot d\,F$$

En appliquant la relation ci-dessus et après calculs, il vient :

$$\begin{aligned} B(t^+) = B(t^-) &- [y_1(C_2) - y_1(C_1)] \cdot M_y(t^-) \\ &- [x_1(C_2) - x_1(C_1)] \cdot M_x(t^-) \\ &- \sum_j \Omega_j \cdot N_j \end{aligned}$$

Ω_j ayant l'expression déjà donnée à propos de la transformation des $u_j(z)$.

δ) **Efforts tranchants, moment de torsion :**

$$\left| \begin{array}{l} T_x(t^+) = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot dx_2 \\ T_y(t^+) = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot dy_2 \\ H(t^+) = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot d\,\omega_2 \end{array} \right.$$

En utilisant les formules de transformation des x_2, y_2, et ω_2 déjà mentionnées, nous obtenons :

$$\left| \begin{array}{l} T_x(t^+) = T_x(t^-) \cdot \cos\alpha + T_y(t^-) \cdot \sin\alpha \\ T_y(t^+) = T_y(t^-) \cdot \cos\alpha - T_x(t^-) \cdot \sin\alpha \\ H(t^+) = H(t^-) + [y_1(C_2) - y_1(C_1)] \cdot T_x(t^-) - [x_1(C_2) - x_1(C_1)] \cdot T_y(t^-) \end{array} \right.$$

2.23. *Matrice transfert de discontinuité de section*

Elle se déduit directement des formules de transformation établies dans les deux paragraphes précédents, et qui toutes expriment les paramètres de $E(t^+)$ comme des combinaisons linéaires des paramètres de $E(t^-)$.

2.3. Matrice transfert de fondations élastiques

Nous supposons que sont vérifiées les conditions suivantes :

h_1) chaque voile j est fondé sur une semelle filante indépendante j.

h_2) le module de réaction du sol k est constant.

h_3) le sol est comprimé en tout point de chaque semelle.

Comme dans le cas des tronçons réguliers (chapitre I), le système de fondation est rapporté à son repère principal ($Cxyz$). Nous introduisons également les quantités I_{xx}, I_{yy}, J_ω et S_j (surface portante de la semelle j).

Soit M un point quelconque d'une semelle j, u (M) son déplacement vertical et σ (M) la contrainte exercée par la semelle j sur le sol au point M. Les efforts internes dans la section $z = 0$ sont :

$$\left|\begin{array}{l} M_x(0) = +\sum_j \int \sigma(M) \cdot [y(M) - y(G_j)] \cdot dF \\ M_y(0) = -\sum_j \int \sigma(M) \cdot [x(M) - x(G_j)] \cdot dF \\ B\ (0) = +\sum_j \int \sigma(M) \cdot \omega(M) \cdot dF \\ N\ (0) = +\sum_j \int \sigma(M) \cdot dF \end{array}\right.$$

(les intégrales se font sur les semelles j).

Comme il n'y a décollement en aucun point M, nous aurons en tout point :

$$\sigma(M) = k \cdot u(M)$$

avec :

$$u(M) = u_j(0) - v'_x(0) \cdot [x(M) - x(G_j)] - v'_y(0) \cdot [y(M) - y(G_j)] - \theta'(0) \cdot \omega(M)$$

Nous pouvons donc, dans chaque intégrale du système ci-dessus, remplacer $\sigma(M)$ par l'expression développée de $u(M)$ multipliée par k. Comme x, y et ω sont des coordonnées généralisées principales, toutes les intégrales de produits croisés sont nulles et il vient finalement après simplification :

$$M_x(0) = -k \cdot I_{yy} \cdot v'_y(0) \qquad B\ (0) = -k \cdot J_\omega \cdot \theta'(0)$$
$$M_y(0) = +k \cdot I_{xx} \cdot v'_x(0) \qquad N_j(0) = +k \cdot S_j \cdot u_j(0)$$

Nous allons maintenant considérer que le véritable encastrement de la structure est un **encastrement rigide** situé juste au-dessous de la liaison élastique que nous venons d'étudier (fig. 4).

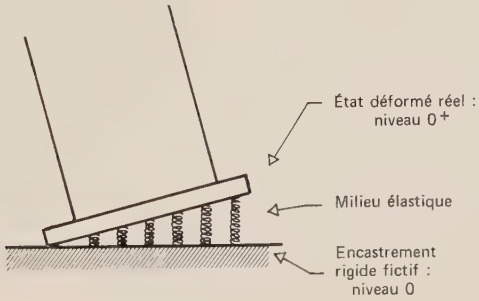


Fig. 4. — **Définition de l'encastrement de la structure.**

A l'encastrement rigide fictif on a bien sûr :

$$v'_x(0) = v'_y(0) = \theta'(0) = u_j(0) = 0$$

Par contre, après la liaison élastique, c'est-à-dire en 0^+ :

$$v'_x(0^+) = +M_y(0)/k \cdot I_{xx} \qquad \theta'(0^+) = -B\ (0)/k \cdot J_\omega$$
$$v'_y(0^+) = -M_x(0)/k \cdot I_{yy} \qquad u_j(0^+) = +N_j(0)/k \cdot S_j$$

(en tenant compte de la continuité des efforts internes en $z = 0$).

Tous les autres paramètres de $E(z)$ n'étant pas modifiés lors du passage de la liaison élastique, nous déduisons des quatre relations ci-dessus l'expression de la matrice transfert de fondations élastiques.

Remarque : il est possible, grâce à un certain nombre d'astuces, de traiter des systèmes de fondations élastiques plus complexes que ceux définis par les trois hypothèses h_1, h_2 et h_3.

CHAPITRE III

APPLICATION AU CALCUL PRATIQUE DES SYSTEMES DE CONTREVENTEMENT

Soit h la cote du sommet de l'immeuble. Il est clair qu'en partant de E (0) (encastrement rigide, fictif ou non) et en cheminant de singularité en singularité, multipliant à chaque fois par la matrice transfert qui convient, on aboutit à une relation du type :

$$E(h) = \mathcal{M} \circ E(0)$$

$\mathcal{M}$ est la matrice transfert globale de l'immeuble, soumis à un chargement donné.

Il est facile de vérifier que les termes de charge, introduits dans la dernière colonne des matrices transfert de tronçon, ne viennent pas perturber au cours des multiplications successives les termes des autres colonnes : $\mathcal{M}$ est donc formée de deux parties bien distinctes :

- la dernière colonne dépend des termes de charge;
- le reste de la matrice ne dépend que des caractéristiques géométriques et mécaniques du système de contreventement étudié.

D'un point de vue pratique, on déduit de cette propriété que l'on peut, en un seul calcul matriciel, traiter plusieurs cas de charge : il suffit de mener le calcul avec plusieurs colonnes de termes de charge.

De la relation matricielle $E \circ (h) = \mathcal{M} \circ E(0)$ on peut extraire $12 + 2m$ relations linéaires liant les $2x(12 + 2m)$ composantes inconnues de E (h) et E (0). Les $12 + 2m$ équations linéaires supplémentaires nécessaires s'obtiennent en écrivant les conditions aux limites :

α) $z = 0$ **est une section d'encastrement rigide :**

$$v_x(0) = v'_x(0) = v_y(0) = v'_y(0) = \theta(0) = \\ = \theta'(0) = u_j(0) = 0 \qquad (6 + m)$$

β) $z = h$ **est une extrêmité libre :**

$$M_y(h) = T_x(h) = M_x(h) = T_y(h) = \\ = B(h) = H(h) = N_j(h) = 0 \qquad (6 + m)$$

La résolution pratique du système linéaire peut se faire de la manière suivante : les efforts internes en h (qui sont nuls) s'expriment linéairement en fonction des seuls efforts internes à l'encastrement (les composantes cinématiques de E (0) sont nulles) et des termes de charge : schématiquement, nous aurons donc :

$$F(h) = (0) = \mathcal{M}^* \circ F(0) + \overline{F}(h)$$

(F (h), F (0) et $\overline{F}$ (h) sont les vecteurs-colonnes extraits respectivement de E (h), E (0) et de la première colonne de $\mathcal{M}$, et qui ne comprennent que les efforts internes; $\mathcal{M}^*$ est une matrice $(6 + m) \times (6 + m)$ extraite de $\mathcal{M}$.)

D'où : $\qquad F(0) = -(\mathcal{M}^*)^{-1} \circ \overline{F}(h)$

E (0) étant par là-même entièrement déterminé, il suffit de reprendre le calcul par produits en cascade, décrits au début du chapitre, pour obtenir la valeur des composantes de tout vecteur E (z) ($0 \leqslant z \leqslant h$). Ces composantes permettent de calculer un certain nombre de quantités relatives à la section z (déplacements horizontaux ou verticaux, moments ou efforts normaux dans les voiles, efforts tranchants dans les linteaux, contraintes normales dans les voiles, etc.).

Remarque 1 : Pour établir la matrice de discontinuité de section, nous avons supposé que la section de discontinuité ne comportait pas de linteaux et que le nombre de voiles ne variait pas à son passage.

Nous pouvons nous affranchir facilement de la première hypothèse restrictive : une discontinuité de section avec linteaux se traitera en deux étapes : d'abord la discontinuité puis les linteaux ou le contraire, suivant que l'on considère que les linteaux font partie du tronçon supérieur ou inférieur.

Quant à la deuxième hypothèse restrictive, deux cas peuvent se produire :

1) Un voile j disparaît à la cote $t < h$: rien de spécial à prévoir, $u_j(t)$ et $N_j(t)$ ne seront pas modifiés par les produits matriciels intervenant entre t et h, et $N_j(0)$ sera calculé normalement, par résolution du système linéaire extrait.
2) Certains voiles se dédoublent, ou se rassemblent en un seul voile. Ce problème peut se traiter par une généralisation de la matrice de discontinuité définie en 2.2. Mais, si nous voulons pouvoir traiter tous les cas envisageables, les problèmes de programmation deviennent très complexes. Il est plus simple d'introduire des « coutures » par linteaux très rigides, en procédant comme indiqué sur la figure 5.

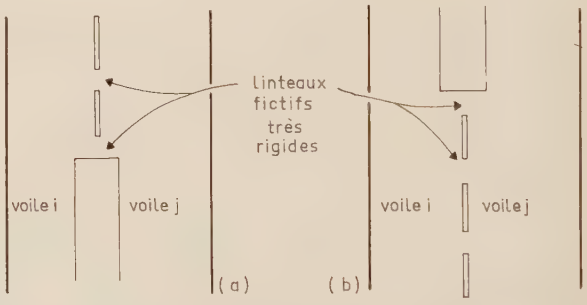


Fig. 5. — **Introduction de linteaux rigides dans le cas où les voiles i et j se rassemblent (a) ou se dédoublent (b).**

Remarque 2 : **Détermination des moments dans les voiles.**

$v_x(t)$ et $v_y(t)$ étant les flèches horizontales principales du centre de flexion C de la section de cote t du système de contreventement :

$$\left| \begin{array}{l} v''_x(t) = +M_y(t)/EI_{xx} \\ v''_y(t) = -M_x(t)/EI_{yy} \\ \theta''(t) = -B(t)/EJ_\omega \end{array} \right.$$

Nous en tirons les dérivées secondes des déplacements des centres de flexion C_j des voiles j et la valeur des

moments dans ces voiles suivant des directions quelconques :

$(\overrightarrow{C_j x_j}, \overrightarrow{C_j y_j})$: directions principales du voile j.

$(C_j XY)$: repère quelconque.

$$(M_X)_j = - E_j (I_{YY})_j \cdot v''_Y (C_j) + E_j (I_{XY})_j \cdot v''_X (C_j)$$

$$(M_Y)_j = + E_j (I_{XX}) \cdot v''_X (C_j) - E_j (I_{XY})_j \cdot v''_Y (C_j)$$

avec :

$$(I_{XX})_j = I_{x_j x_j} \cdot \cos^2 \alpha + I_{y_j y_j} \cdot \sin^2 \alpha$$

$$(I_{YY})_j = I_{x_j x_j} \cdot \sin^2 \alpha + I_{y_j y_j} \cdot \cos^2 \alpha$$

$$(I_{XY})_j = \frac{\text{tg } 2\alpha}{2} [(I_{YY})_j - (I_{XX})_j]$$

($I_{x_j x_j}$ et $I_{y_j y_j}$ sont les inerties principales du voile j, $\alpha = (\overrightarrow{C_j X}, \overrightarrow{C_j X_j})$).

Remarque 3 : **Correction des moments**

L'hypothèse d'indéformabilité transversale des sections du système de contreventement à toute cote z n'est qu'une approche de la réalité : les voiles ont, en fait, entre les planchers indéformables, de petits déplacements horizontaux relatifs, qui sont de légères ondulations autour de la déformée moyenne donnée par la méthode des matrices transfert. Les moments calculés à partir des dérivées secondes des déplacements sont donc entachés d'une erreur systématique que l'on peut corriger de la façon suivante :

A chaque niveau d'étage (qui comporte généralement des linteaux), les sauts de moment sont calculés pour chaque voile à partir des efforts tranchants des linteaux adjacents. Ces sauts de moment corrigés sont alors centrés sur la valeur moyenne des moments calculés à partir des dérivées secondes et donnent ainsi les valeurs corrigées des moments au-dessus et au-dessous de l'étage (fig. 5).

La même remarque s'applique aux bimoments.

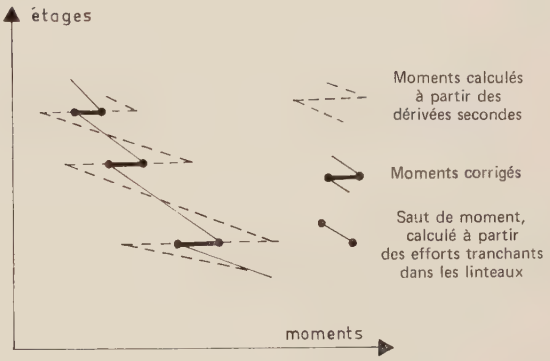


Fig. 6. — **Correction des moments calculés à partir des dérivées secondes.**

CHAPITRE IV

APPLICATIONS NUMERIQUES

4.1. Premier exemple : immeuble régulier non symétrique

4.11. *Généralités*

Nous entendons par immeuble régulier un immeuble dont le système de contreventement possède les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques à tous les étages.

Nous allons, sur cet exemple, comparer les résultats donnés par la méthode de calcul par matrices-transfert avec ceux fournis par trois méthodes permettant le calcul tridimensionnel des contreventements par refends à files d'ouvertures, à savoir :

1) Méthode de Coin, Collignon et Decauchy [4].

2) Méthode de Despeyroux et Guillot [5].

3) Méthode du portique équivalent [1].

Les deux premières méthodes correspondent à la généralisation de la méthode de M. Albiges et J. Goulet [2]. Afin de permettre le calcul tridimensionnel, elles remplacent toutes deux chaque plan de contreventement (refend à plusieurs files d'ouvertures) par un « refend équivalent » ayant, sous un chargement donné, même flèche au sommet. (V. Guillot impose l'égalité des flèches non pas au sommet, mais à un niveau inférieur optimum). Le calcul est mené matriciellement dans les deux cas, mais dans le premier cas, on aboutit à un système linéaire, alors que la seconde méthode conduit à un problème de valeurs propres.

Ces deux méthodes supposent impérativement que l'immeuble est régulier ou quasi régulier.

La méthode du portique équivalent consiste à représenter le contreventement par un système tridimensionnel de poutres (fig. 7) : les trumeaux et les linteaux sont modélisés par des barres verticales ou horizontales, coïncidant avec leurs fibres moyennes et ayant mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques. Des goussets rigides relient les extrémités des linteaux aux fibres moyennes des trumeaux.

Cette méthode donne, dans le cadre de la théorie usuelle des poutres, des résultats que l'on peut considérer comme exacts (la distorsion des trumeaux étant négligée et les planchers étant supposés infiniment rigides dans leur plan). L'introduction de portiques dans le système de contreventement ne pose pas de problèmes.

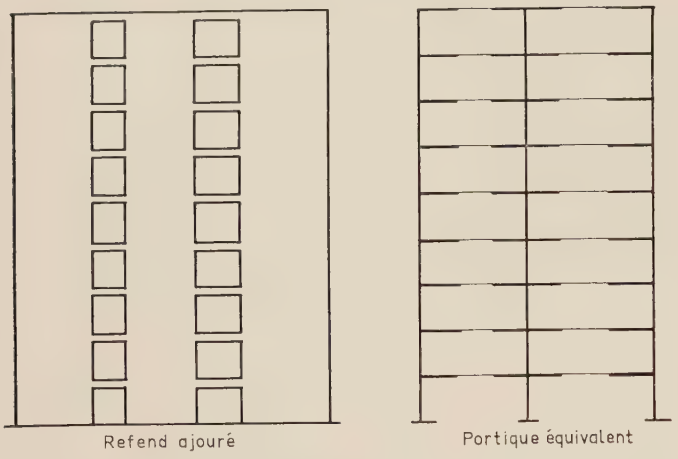


Fig. 7. — **Représentation d'un refend de contreventement par un portique équivalent.**

Cette méthode ne donne, par contre, que des résultats approchés si les trumeaux, de part leurs dimensions, sont soumis à des effets de voile (déformations de distorsions et déformations localisées importantes).

Elle est inapplicable si le système de contreventement comporte des profils ouverts en voiles minces ayant une rigidité sectorielle non négligeable (cas des noyaux d'immeubles).

4.12. *Description sommaire de l'immeuble* (fig. 8)

- trois plans de contreventement parallèles ;
- douze étages de 3 m ;
- huit trumeaux numérotés de 1 à 8 ;
- quatre files de linteaux, numérotées de I à IV ;
- fondations rigides ;
- $E = 1\,600\,000$ t/m² ($\simeq 15\,700$ MPa) ; $G = 1\,000\,000$ t/m² ($\simeq 9\,800$ MPa) ;
- l'épaisseur uniforme des refends est 20 cm.

Caractéristiques mécaniques :

Trumeaux	Surface (m²)	Inertie (m⁴)
1	2.00	16.6667
2	2.00	16.6667
3	1.00	2.0833
4	0.60	0.4500
5	0.60	0.4500
6	0.80	1.0667
7	1.80	12.1500
8	2.40	28.8000

Files de linteaux	Longeur (m)	Inertie (m⁴)
I	2.00	0.0020
II	4.00	0.0050
III	2.00	0.0030
IV	2.00	0.0100

Chargement :

Chargement horizontal uniforme de 1.1833 t ($\simeq 11\,600$ N) par mètre linéaire, appliqué dans le plan moyen du plan de contreventement médian.

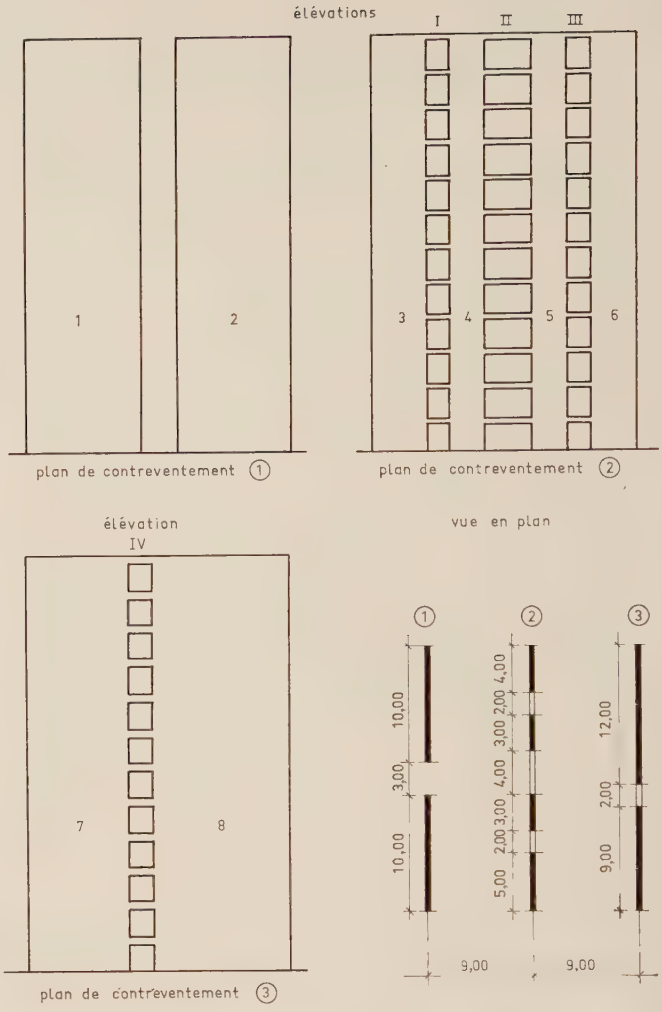


Fig. 8. — **Immeuble régulier non symétrique étudié dans l'exemple 1.**

4.13. *Comparaison des résultats*

Les courbes des figures 9 à 12 visualisent les résultats fournis par les quatre méthodes utilisées.

Les valeurs calculées par la méthode du portique équivalent peuvent être considérées comme quasi-exactes (dans le cadre de la théorie usuelle des poutres) et adoptées comme valeurs de référence. On voit que la méthode des matrices transfert donne sensiblement les mêmes résultats.

4.2. Deuxième exemple : immeuble présentant des discontinuités. Fondations rigides et fondations élastiques

4.21. *Généralités*

L'immeuble de dix étages étudié ici présente une discontinuité de section au sixième étage, avec changement de ligne moyenne pour les trumeaux. Les caractéristiques des linteaux varient elles aussi à partir du sixième étage.

Nous étudierons le cas où les fondations sont rigides, puis le cas où elles sont élastiques.

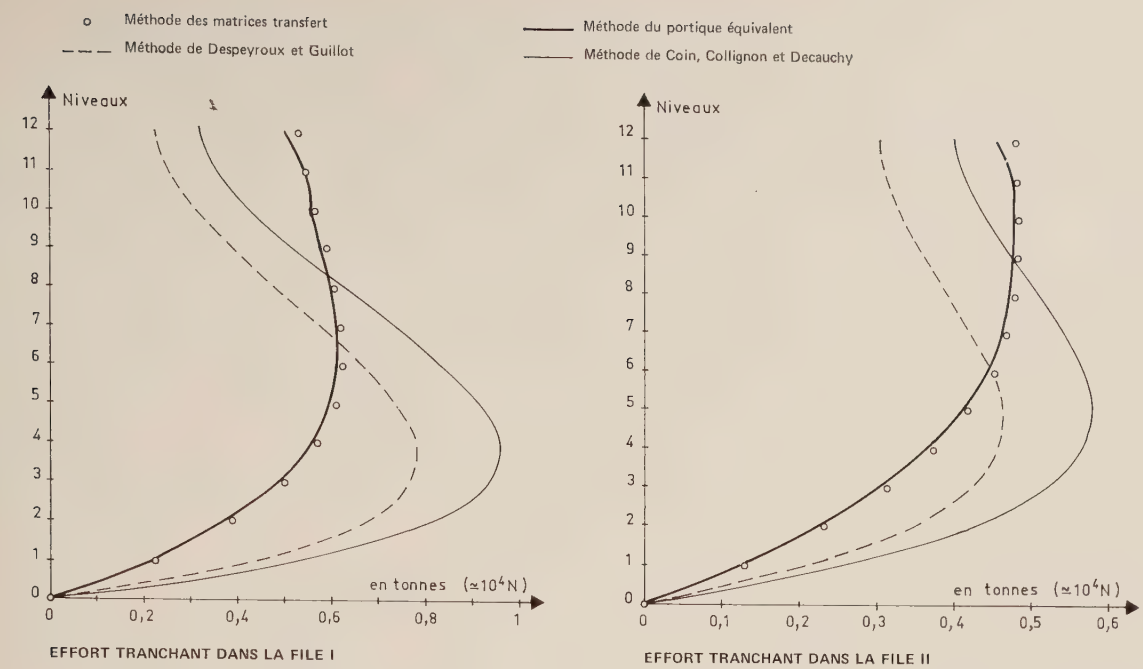


Fig. 9. — **Exemple 1 : immeuble régulier non symétrique. Comparaison des valeurs de l'effort tranchant calculées par les différentes méthodes.**

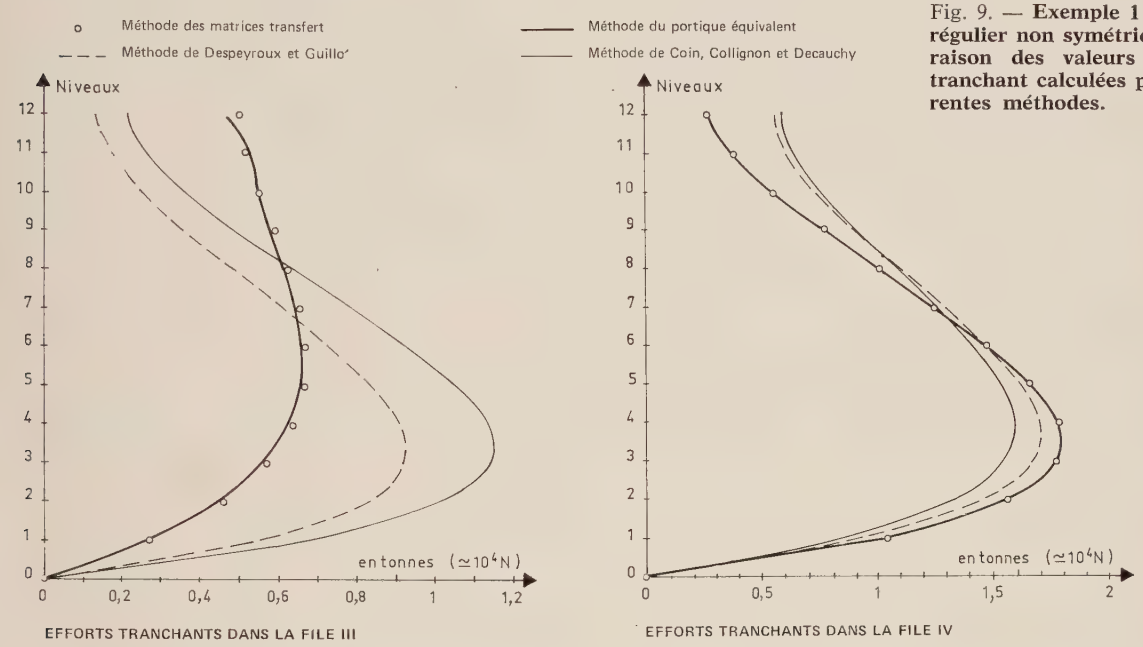
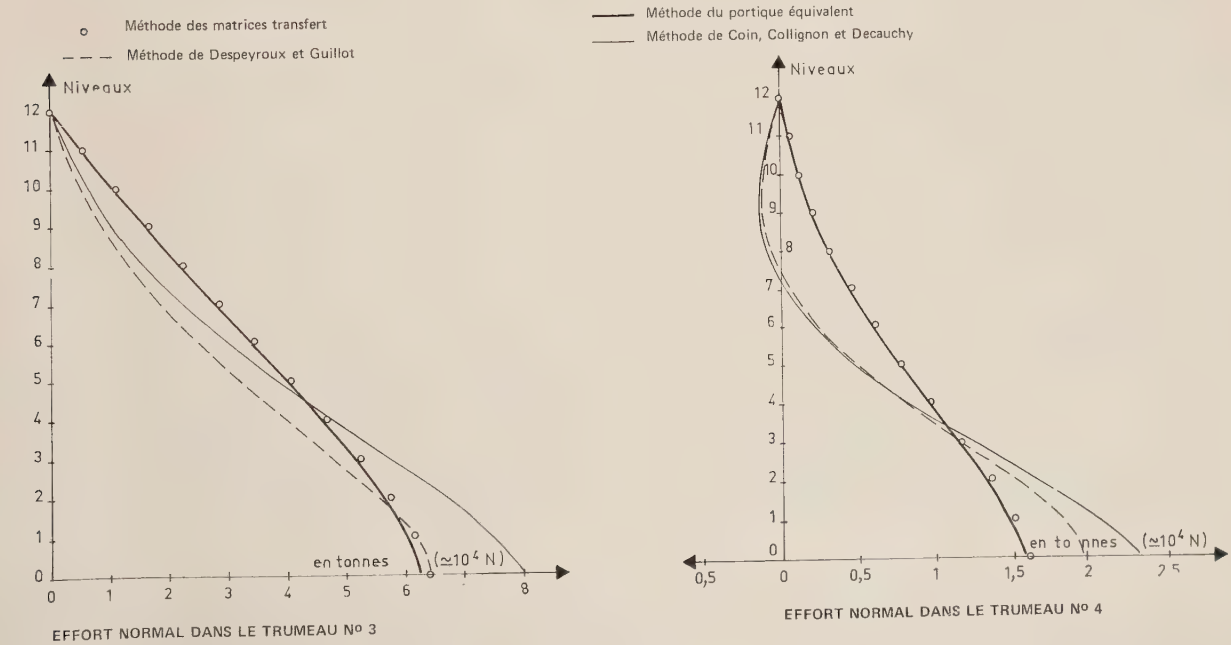


Fig. 10. — **Exemple 1 : immeuble régulier non symétrique. Comparaison des valeurs de l'effort normal dans les trumeaux, calculées par les différentes méthodes.**



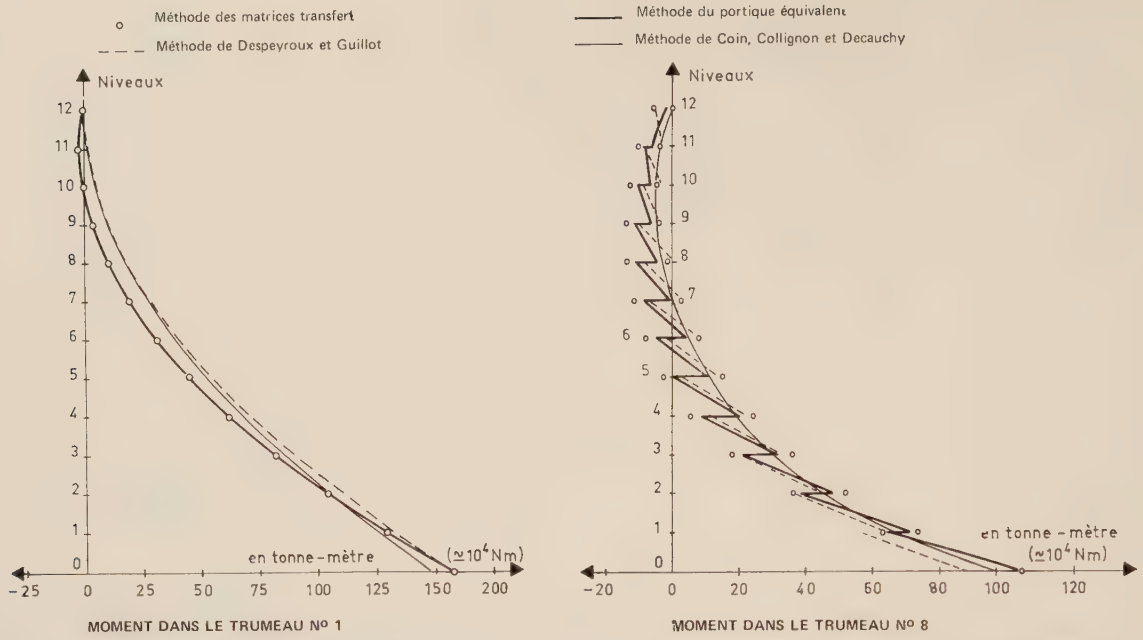


Fig. 11. — **Exemple 1 : immeuble régulier non symétrique. Comparaison des valeurs du moment dans les trumeaux, calculées par les différentes méthodes, sans correction des sauts de moments.**

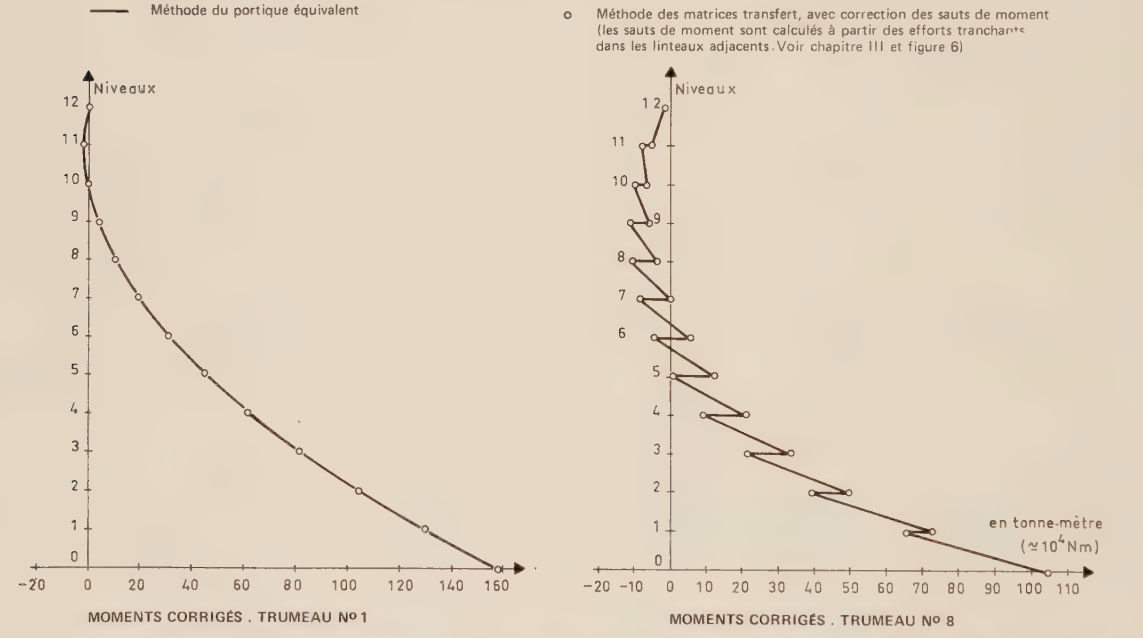


Fig. 12. — **Exemple 1 : immeuble régulier non symétrique. Comparaison des valeurs du moment dans les trumeaux calculées par la méthode du portique équivalent et par la méthode des matrices transfert mais avec correction des moments calculés.**

Ce type de problème sort du domaine d'application de la méthode de Coin, Collignon et Decauchy comme de celle de Despeyroux et Guillot. Nous ne disposerons donc que de la méthode du portique équivalent pour faire les comparaisons..

4.22. *Description sommaire de l'immeuble* (fig. 13)

- trois plans de contreventement parallèles ;
- dix étages de 3 m ;
- huit trumeaux numérotés de 1 à 8 ;
- cinq files d'ouvertures numérotées de I à V ;
- épaisseur uniforme des refends : 20 cm ;
- E = 1 600 000 t/m² (≃ 15 700 MPa) ;
- G = 800 000 t/m² (≃ 7 850 MPa) ;

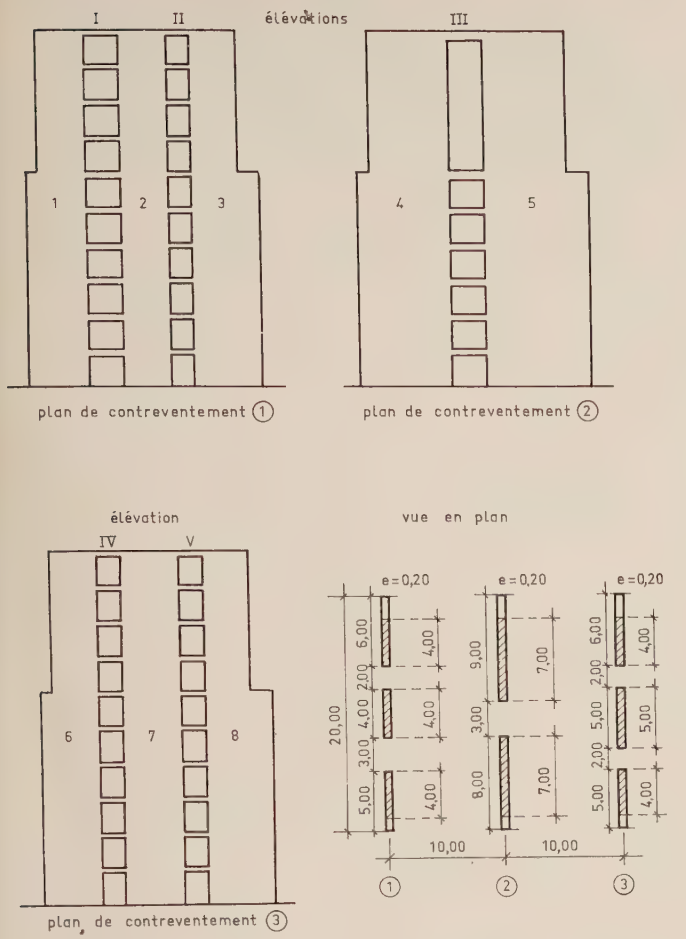


Fig. 13. — **Immeuble présentant des discontinuités étudié dans l'exemple 2.**

Files de linteaux	Etages 1 à 6		Etages 7 à 10	
	L (m)	I (m⁴)	L (m)	I (m⁴)
I	3.00	0.003	3.00	0.002
II	2.00	0.002	2.00	0.002
IV	2.00	0.002	2.00	0.002
V	2.00	0.002	2.00	0.002

File de linteaux III : L = 3.000 m
Etages 1 à 5 : I = 0.005 m⁴
Etage 6 : I = 0.010 m⁴
Etages 7 à 9 : Pas de linteaux
Etage 10 : I = 0.010 m⁴

Chargement extérieur

Charge trapésoïdale dans le plan moyen du plan de contreventement médian :

$q_0 = 6$ t ($\simeq 6\ 10^4$ N) par mètre linéaire

$q_{30} = 12$ t ($\simeq 12\ 10^4$ N) par mètre linéaire

Fondations élastiques

Après avoir étudié le cas où les trumeaux sont parfaitement encastrés en pied, nous introduirons un système de fondation élastique : chaque trumeau sera fondé sur une semelle indépendante, de longueur égale à la largeur du trumeau et de 1 m de largeur.

Le coefficient de réaction du sol sera $k = 5\,000$ t/m³ (49 MN/m³).

4.23. *Comparaison des résultats*

Les courbes des figures 14 donnent, dans le cas des fondations rigides, puis dans le cas des fondations élastiques, les valeurs à chaque étage des quantités suivantes, calculées par la méthode des matrices transfert et la méthode du portique équivalent :

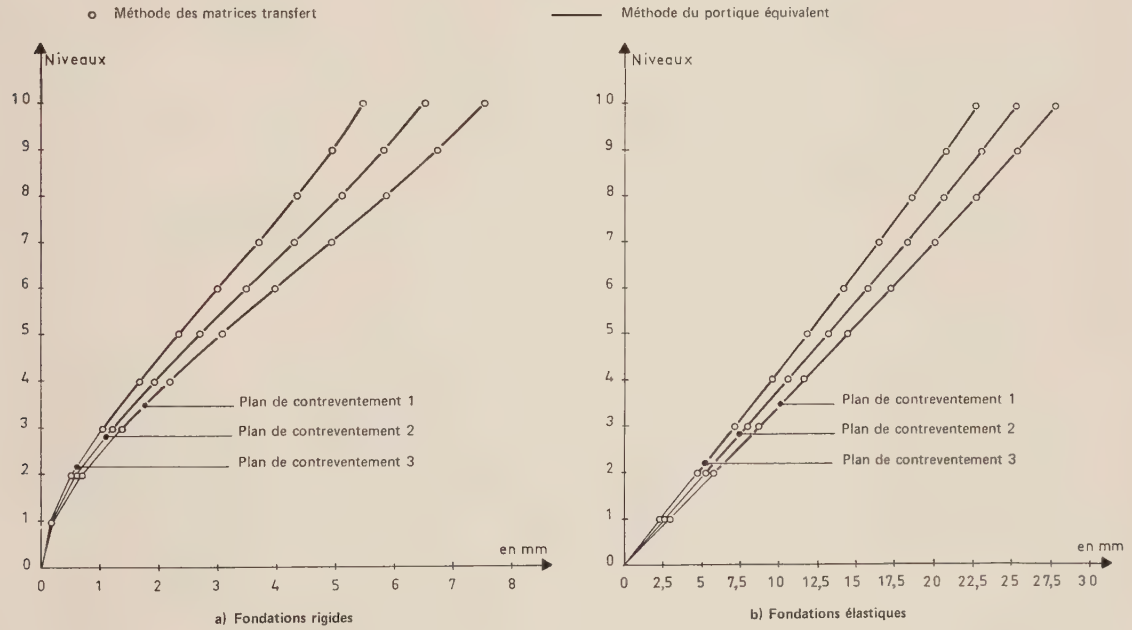


Fig. 14. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités. Comparaison des valeurs des déformations horizontales calculées par les deux méthodes (portique équivalent et matrices transfert).**

- déplacements horizontaux de chaque plan de contreventement ;
- efforts tranchants dans les files de linteaux ;
- effort normal dans les trumeaux ;
- moments dans les trumeaux (les sauts de moments à chaque étage sont calculés à partir des valeurs des efforts tranchants dans les linteaux adjacents comme indiqué au chapitre III).

Nous pouvons constater la très bonne concordance des résultats donnés par les deux méthodes (écarts relatifs, la plupart du temps inférieurs à 2 ou 3 %).

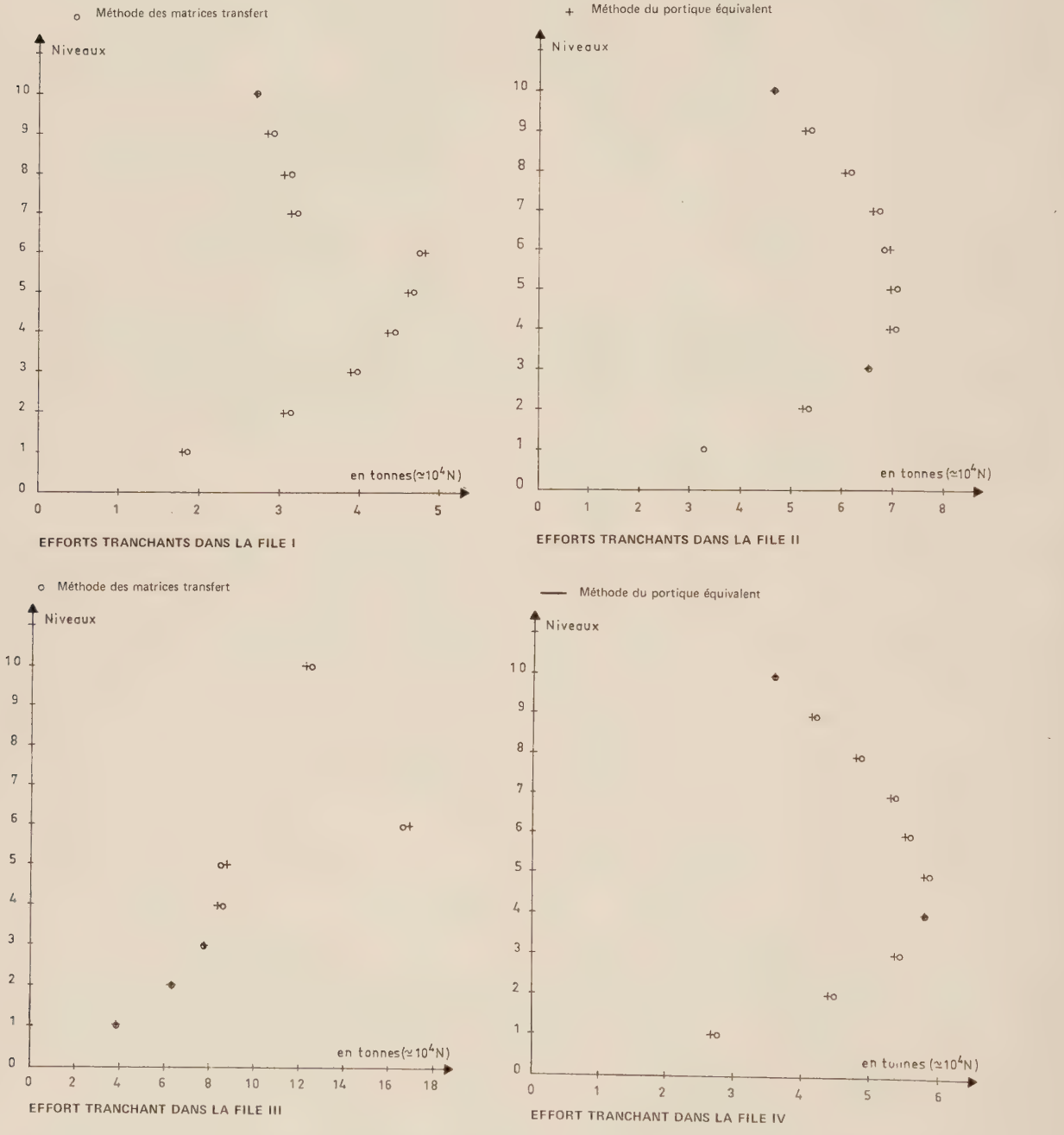


Fig. 15. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec** fondations rigides. **Comparaison des efforts tranchants calculés par les deux méthodes.**

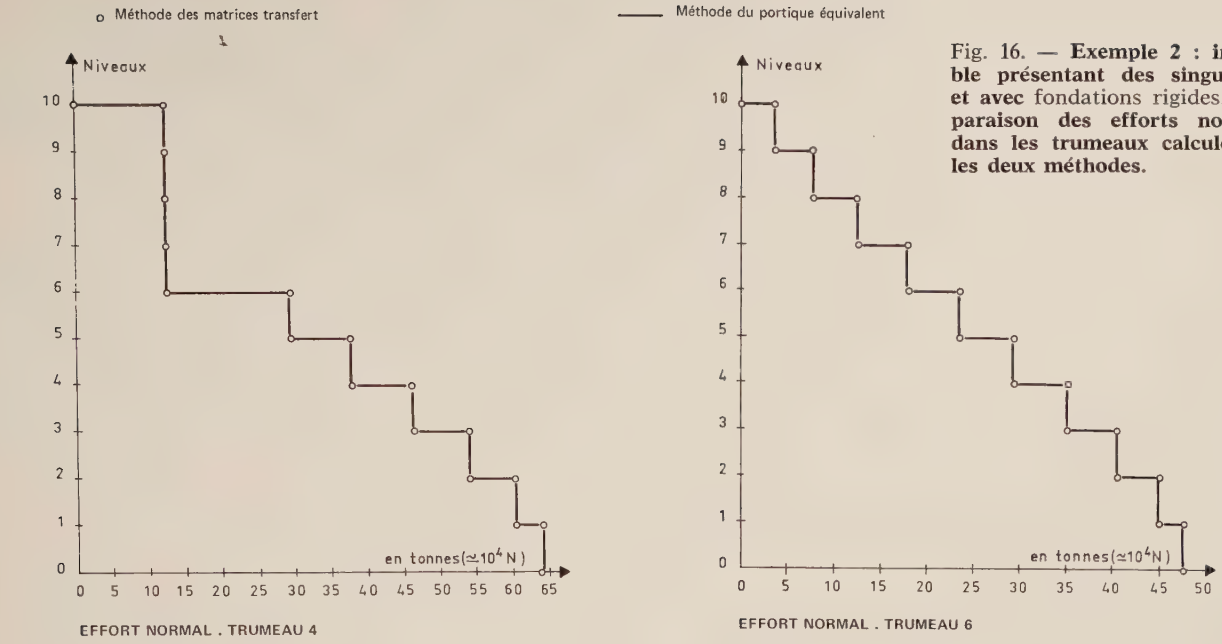


Fig. 16. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec** fondations rigides. **Comparaison des efforts normaux dans les trumeaux calculés par les deux méthodes.**

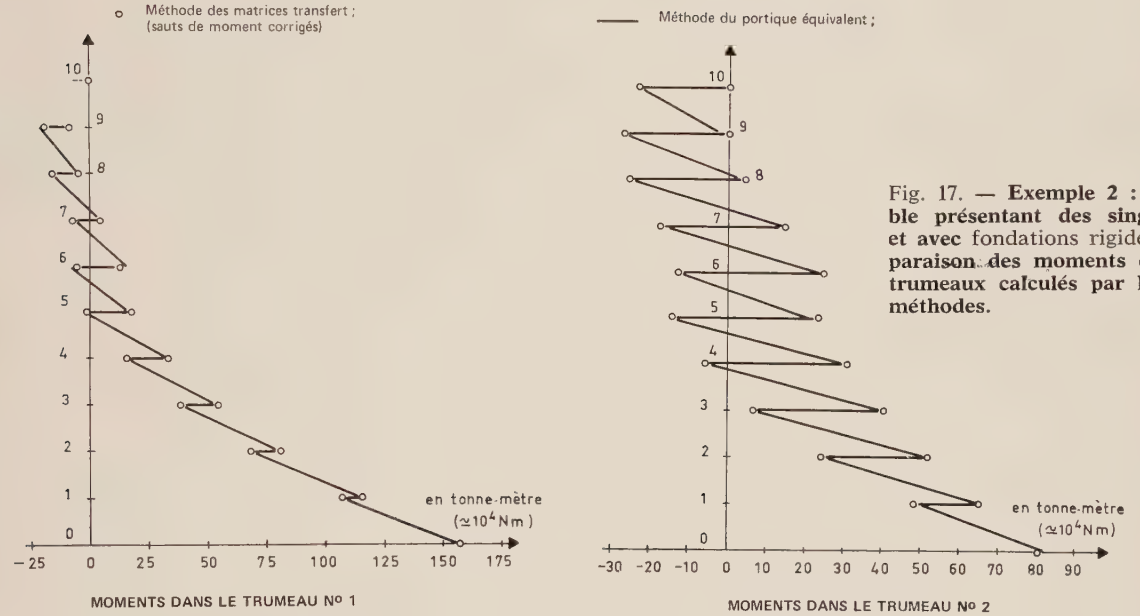
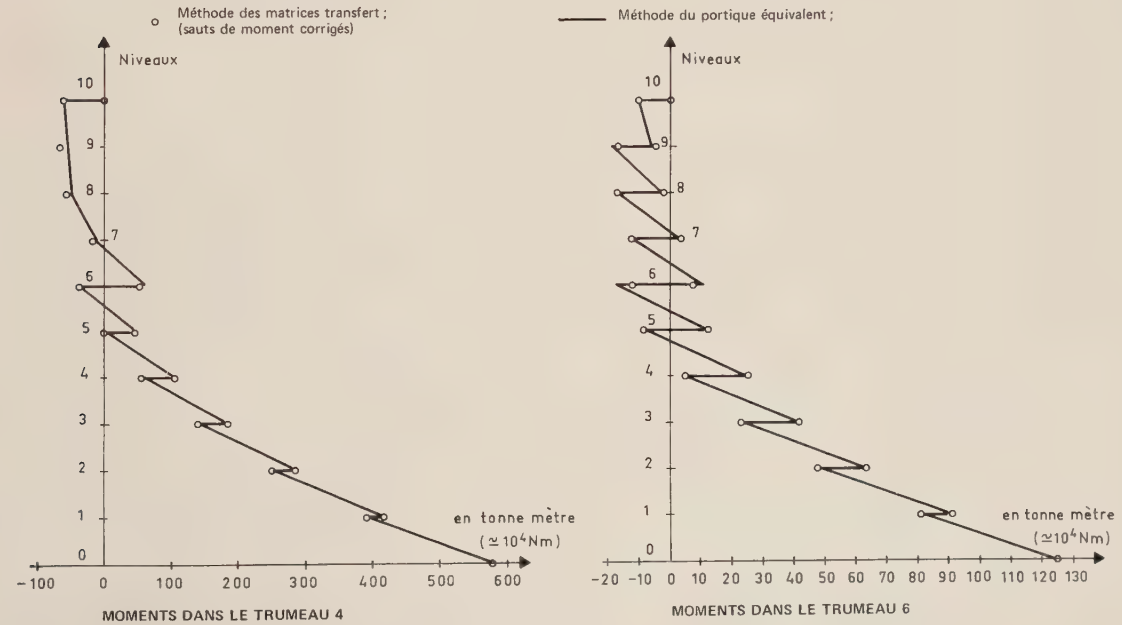
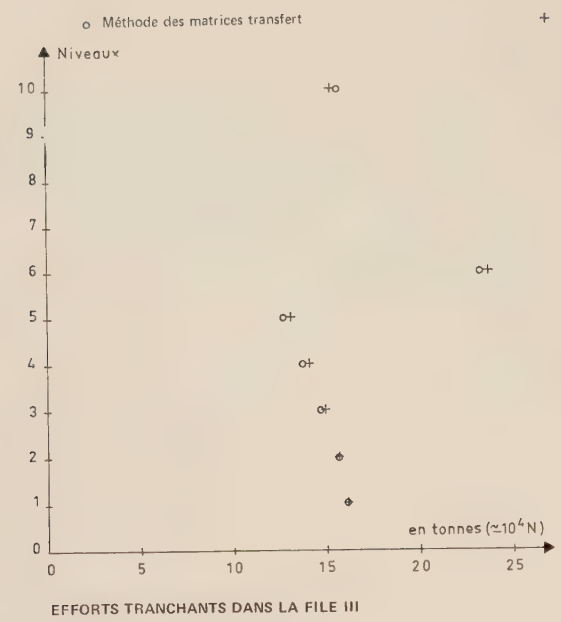
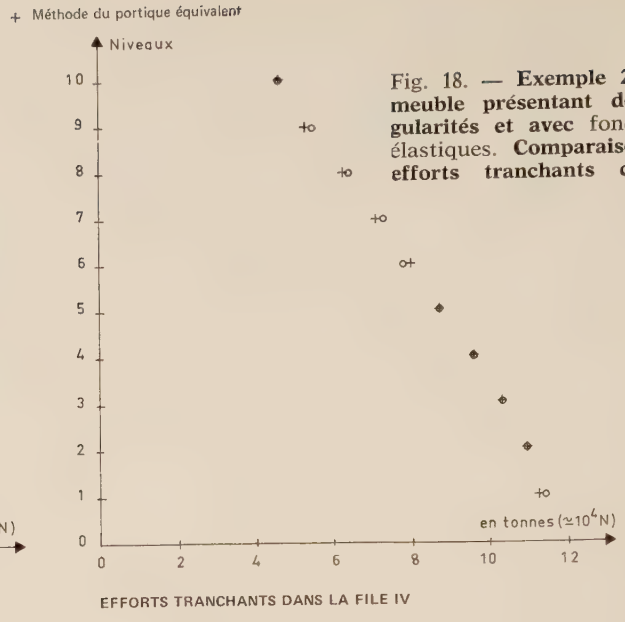


Fig. 17. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec** fondations rigides. **Comparaison des moments dans les trumeaux calculés par les deux méthodes.**



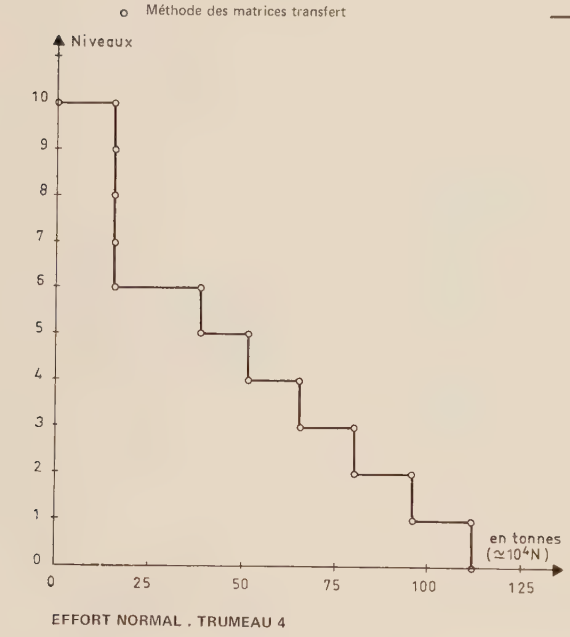


EFFORTS TRANCHANTS DANS LA FILE III

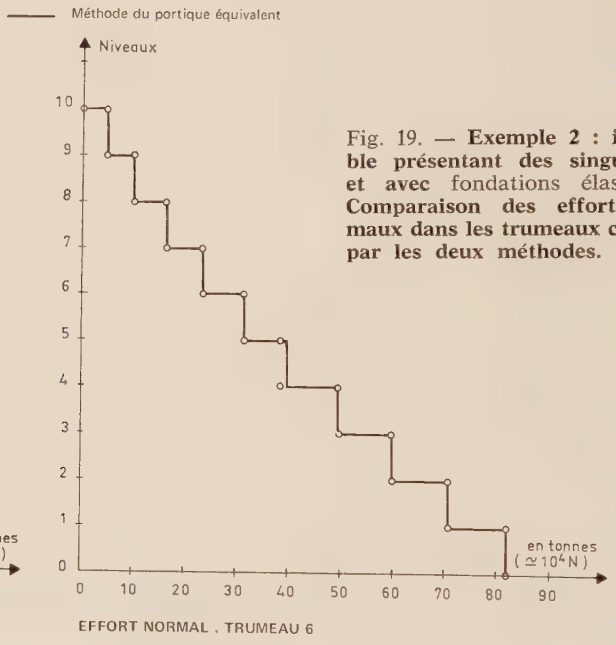


EFFORTS TRANCHANTS DANS LA FILE IV

Fig. 18. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec** fondations élastiques. **Comparaison des efforts tranchants calculés**

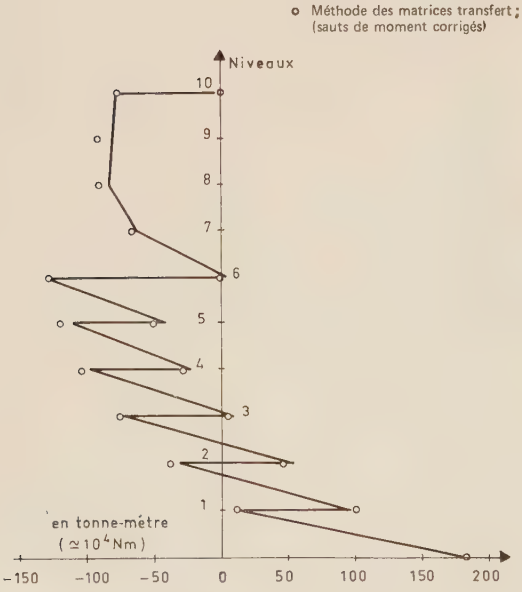


EFFORT NORMAL . TRUMEAU 4

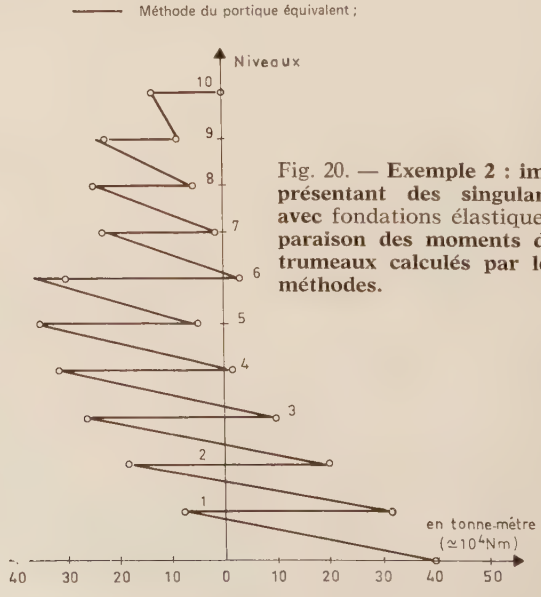


EFFORT NORMAL . TRUMEAU 6

Fig. 19. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec** fondations élastiques. **Comparaison des efforts normaux dans les trumeaux calculés par les deux méthodes.**



MOMENTS DANS LE TRUMEAU 4



MOMENTS DANS LE TRUMEAU 6

Fig. 20. — **Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec** fondations élastiques. **Comparaison des moments dans les trumeaux calculés par les deux méthodes.**

ANNEXE

PRISE EN COMPTE DES PORTIQUES REGULIERS

La **méthode approchée** exposée ci-après permet d'introduire dans un système de contreventement des portiques multitravées non symétriques, avec prise en compte des déformations d'effort normal dans les montants. Elle suppose que les caractéristiques des portiques ne varient pas avec la hauteur, ou tout au moins restent constantes par groupes d'étages (5 ou 6 minimum).

A 1. Portiques symétriques à une travée

Ce cas particulier va nous permettre de donner le principe de la méthode.

Considérons le portique symétrique de la figure 21, rapporté au repère (0 ξ z).

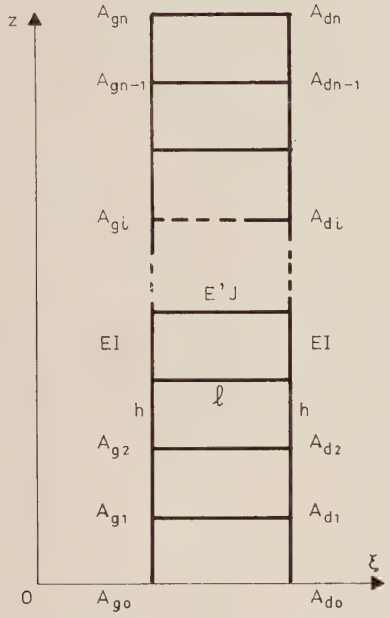


Fig. 21. — **Portique symétrique à une travée.**

Après avoir réalisé une coupure au milieu M_i de chaque traverse *i*, donnons à ce portique une déformée horizontale $\xi_o(z)$ (fig. 22 a), obtenue en imposant que chaque nœud A_{gi} prenne une certaine flèche ξ_i (la flèche des A_{di} est aussi ξ_i).

Refermons maintenant toutes les coupures des milieux de traverse M_i, tout en imposant aux A_{gi} et A_{di} de garder leur flèche horizontale ξ_i (fig. 22 b). Cette fermeture des coupures se fait en appliquant aux nœuds M_i les deux efforts verticaux opposés d'intensité T_i qui conviennent (les M_i étant point d'inflexion, il n'y a pas de moments hyperstatiques libérés).

Notons $\xi_1(z)$, la nouvelle déformée des montants et posons $\Delta\xi(z) = \xi_1(z) - \xi_o(z)$.

On a pour $i = 1$ et $i = n$, $\Delta\xi(z_i) = 0$.

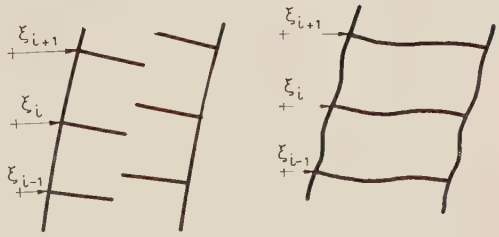


Fig. 22. — **Déformée du portique :**
a) **après coupure au milieu des travées ;**
b) **après avoir refermé ces coupures.**

$\Delta\xi(z)$ s'annule en outre une fois entre chaque étage et possède par conséquent un point d'inflexion entre chaque étage.

Nous supposerons que ce point d'inflexion et ce point d'annulation sont confondus et se situent exactement à mi-étage.

Si EI est la rigidité des montants, la variation de moment dans ces montants, due à la fermeture des coupures est :

$$\Delta M(z) = -EI \cdot \Delta\xi''(z)$$

Le point à mi-étage est donc **point de variation de moment nulle** ($\neq$ point de moment nul).

On en déduit que pour la fermeture des coupures, le portique peut être « approximé » par la structure de la figure 23.

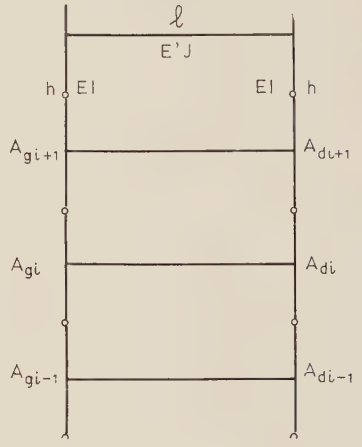


Fig. 23. — **Structure correspondant au portique coupures refermées.**

Isolons l'élément de l'étage *i* (après fermeture des coupures) (fig. 24). Δ_i étant défini sur la figure 24, un calcul simple montre que, T_i étant l'effort tranchant dans la traverse :

$$T_i = \left(\frac{h\,l^2}{24\,EI} + \frac{l^3}{12\,E'J}\right)^{-1} \cdot \Delta_i = K \cdot \Delta_i$$

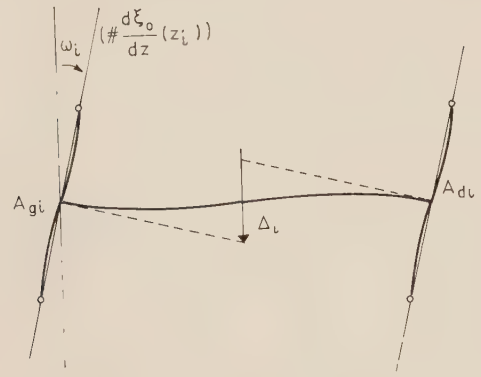


Fig. 24. — **Déformée d'un élément d'étage de la structure de la figure 23.**

Soient $u_g(z)$ (resp. $u_d(z)$) les déformations d'effort normal dans le montant gauche (resp. droit).

$$\Delta_i = \omega_i l + u_g(z_i) - u_d(z_i)$$

$$\Delta_i \# - \frac{d\xi_o}{dz}(z_i)\, l + u_g(z_i) - u_d(z_i)$$

D'où : $T_i = K \,.\, [-\xi'_o(z_i)\, l + u_g(z_i) - u_d(z_i)]$ (1)

De tout ce qui précède, nous pouvons déduire que l'action résistante du portique, dans le système général de contreventement, peut être « approximée » de la manière suivante.

Les deux montants sont représentés dans $E(z)$ par deux voiles de numéros j_g et j_d. A toute cote z, le vecteur état $E(z)$ comprend donc $u_{jg}(z)$, $N_{jg}(z)$, $u_{jd}(z)$ et $N_{jd}(z)$.

En torsion-flexion, les montants j_g et j_d travaillent conjointement avec les autres renfends et profils ouverts : ils ont une déformée du type $\xi_o(z)$.

Considérons un étage i quelconque du portique et écrivons la formule (1) ci-dessus dans le repère principal du tronçon où se trouve l'étage i (repère Cxyz) :

$$T_i = K \,.\, [u_{jg}(z_i) - u_{jd}(z_i) - v'_x(z_i) \,.\, (x_g - x_d) - v'_y(z_i) \,.\, (y_g - y_d) - \theta'(z_i) \,.\, (\omega_g - \omega_d)]$$

ω_g et ω_d sont les aires sectorielles de pôle C des lèvres de la coupure, calculées à partir de A_g et A_d, le long des demi-traverses :

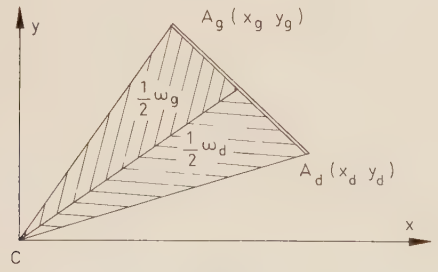


Fig. 25. — **Définition de ω_g et ω_d.**

$$\omega_g - \omega_d = x_g\, y_d - x_d\, y_g$$

On retrouve la formule établie en 2.1., pour la prise en compte des linteaux : l'action résistante de chaque étage de portique est la même que celle d'un linteau équivalent de raideur K :

$$K = \left(\frac{h\, l^2}{24\, EI} + \frac{l^3}{12\, E'J} \right)^{-1}$$

Cet artifice permet d'introduire des portiques symétriques à une travée dans un calcul de contreventement, avec prise en compte des déformations d'effort normal dans les montants, sans modification de la méthode générale exposée dans les chapitres précédents. On peut également l'utiliser pour des portiques multitravée du type suivant :

E'J	E'J	E'J	E'J	E'J	E'J	
$\frac{1}{2}$ EI	EI	EI	EI	EI	EI	$\frac{1}{2}$ EI
h	h	h	h	h	h	h
l	l	l	l	l	l	

Les efforts tranchants dans les traverses, T_i, sont donnés directement. Les moments dans les montants se calculent en ajoutant aux moments moyens de type $M_o = -EI\,\xi''_o$ donnés par la méthode des matrices transfert) les sauts de moment déduits des T_i.

A 2. Portiques multitravées non symétriques

Un raisonnement du type de celui présenté au paragraphe précédent conduit à étudier l'action résistante de l'élément d'étage de la figure 26 soumis aux déplacements suivants :

1) inclinaison $\omega_i \# - \frac{d\xi_o}{dz}(z_i)$;

2) déformations d'effort normal $u_j(z_i)$ dans les montants $_j$ $(j = 1, n)$.

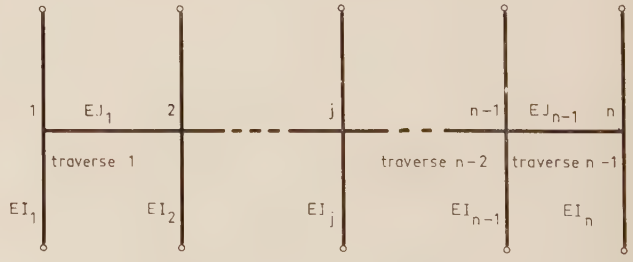


Fig. 26. — **Elément d'étage d'un portique multitravées non symétrique.**

Il est nécessaire, ici, de faire appel aux coefficients d'influence de ces déplacements sur les efforts tranchants dans les traverses 1 à $n - 1$.

Soit k une des $n - 1$ traverses. Le signe de T_k sera par exemple celui de l'effort vertical exercé par le bord droit d'une coupure sur le bord gauche.

T_k pourra s'écrire :

$$T_k = - K_k^{\omega} \cdot \xi'_0(z_i) + \sum_j K_k^j \cdot u_j(z_i)$$

Les coefficients K_k^{ω} et K_k^j seront déterminés numériquement soit par un programme de calcul de système

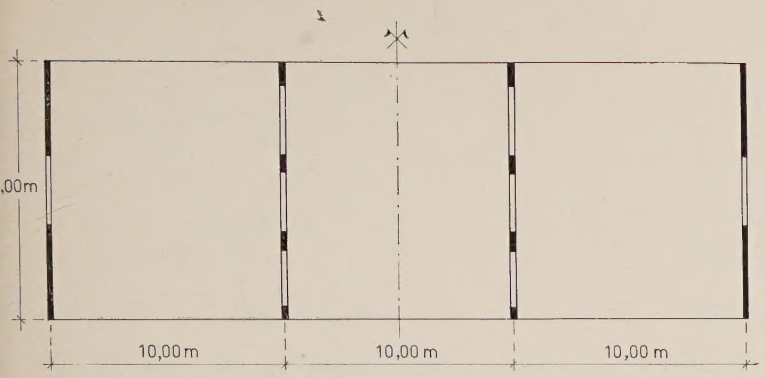


Fig. 27. — **Exemple 3 : immeuble symétrique comportant des portiques. Vue en plan.**

de barres, soit par la technique des matrices transfert appliquées aux poutres continues (voir [3], p. 39 à 47). La programmation de cette application est simple.

Nous obtenons ainsi une généralisation des formules du paragraphe 2.1., établies pour la prise en compte des linteaux. Nous ne donnerons pas les formules correspondant aux sauts de moments et de bimoment, qui se déduisent facilement de celles du paragraphe 2.1. D'un point de vue pratique, comme pour le cas des portiques symétriques à une travée (voir A 1), nous introduirons, pour le calcul, un voile par montant. Les efforts tranchants dans les traverses (T_k) pourront être calculés directement par l'ordinateur au moment de la sortie des résultats. Le calcul des sauts de moment dans les montants du portique suppose que l'on en connaisse les coefficients d'influence, vis-à-vis de ω et des u_j.

A 3. Exemple 3 : Prise en compte de portiques multitravées non symétriques

Cet exemple constitue un test de la méthode approchée de prise en compte des portiques multitravée non symétriques exposée en A 2. Nous comparerons les résultats obtenus par cette méthode avec ceux fournis par la méthode du portique équivalent (voir paragraphe 4.11.).

A 3.1. *Description sommaire de l'immeuble*

- Quatre plans de contreventements. L'immeuble est symétrique.
- Dix étages de 3 m.
- Fondations rigides.
- Pression du vent uniforme : 0.1 t/m².
- E = 2 000 000 t/m² (≃ 19 600 MPa).
  G = 1 000 000 t/m² (≃ 9 800 MPa).

Pour le calcul, la portée des linteaux des refends sera majorée de 0.33 m (prise en compte des déformations localisées aux encastrements des linteaux). Les portées des traverses des portiques seront comptées entre nus des poteaux.

Les caractéristiques des refends et portiques sont détaillées ci-dessous et sur les figures 27 et 28.

Inerties des poutres du portique :

1.00 × 0.25 : I = 0.020833 m⁴

0.75 × 0.25 : I = 0.008789 m⁴

0.50 × 0.25 : I = 0.002604 m⁴

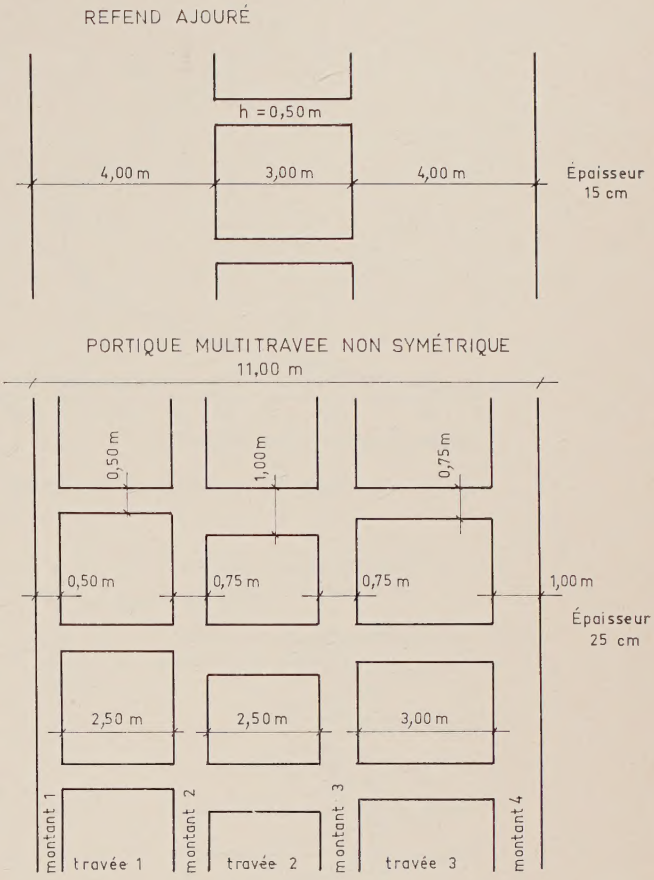


Fig. 28. — **Exemple 3 : immeuble symétrique comportant des portiques. Refends et portiques en élévation.**

A 3.2. *Comparaison des résultats*

Les courbes des figures ci-après comparent les résultats fournis par les deux méthodes pour les grandeurs suivantes :

- efforts tranchants dans les traverses et les linteaux ;
- moments dans les montants ;
- efforts normaux dans les montants et trumeaux ;
- déformée horizontale.

Les sauts de moment dans les montants ont été calculés à partir de leurs coefficients d'influence vis-à-vis de ω et des u_j (voir 3.42.). Les valeurs moyennes des moments d'étages sont déduites des dérivées secondes de la déformée horizontale (de type $\xi_o(z)$) donnée par le calcul par matrices transfert (voir 3.42.).

Nous constatons que la concordance des deux méthodes est généralement assez bonne : la méthode des matrices transfert approche à environ 5 % la plupart des résultats de la méthode du portique équivalent en ce qui concerne les efforts tranchants maximaux, les efforts normaux (sauf montants 2 et 3 : 10 et 15 %), les moments dans les montants (à partir du 2ᵉ étage), la déformée horizontale.

Les moments au pied des montants sont sous-estimés par la méthode des matrices transfert et présentent des écarts relatifs importants (respectivement 40 %, 45 %,

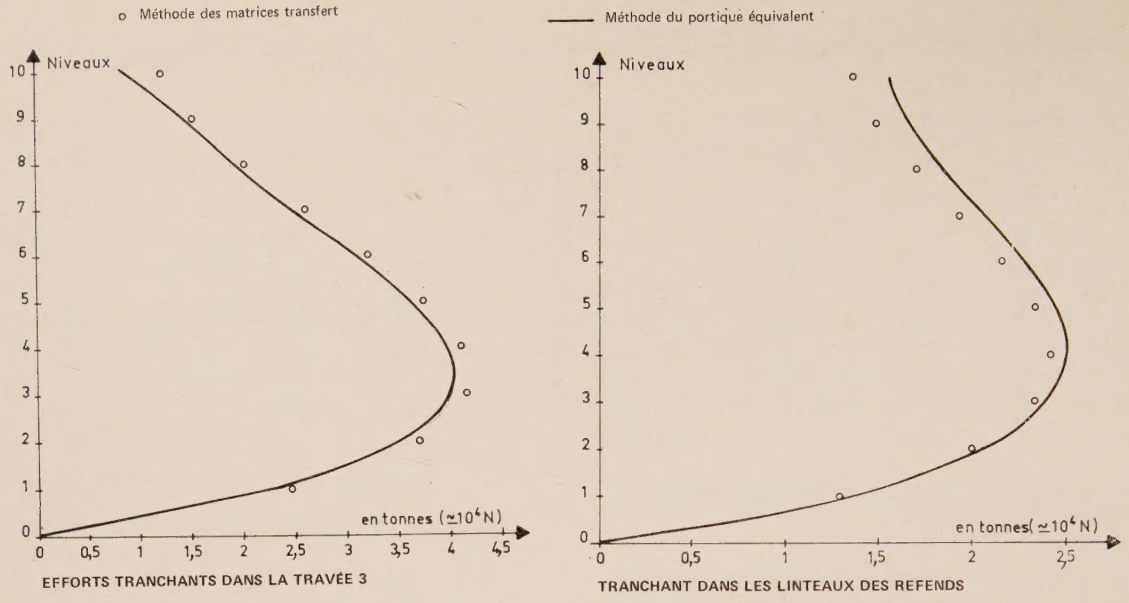


Fig. 29. — **Exemple 3 : comparaison des efforts tranchants calculés suivant les deux méthodes.**

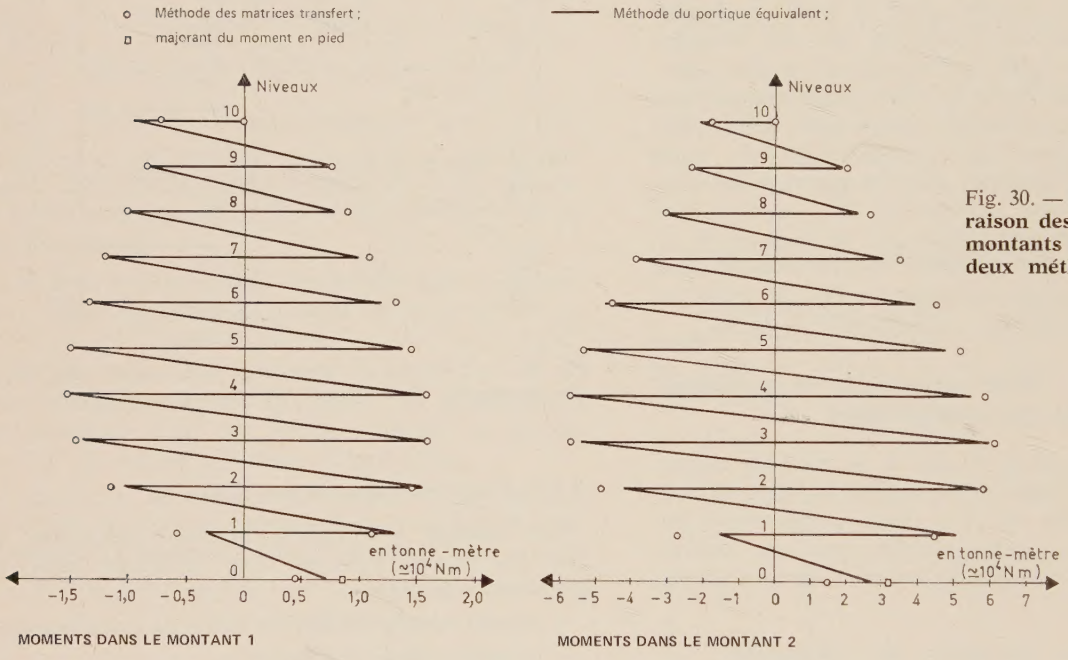


Fig. 30. — **Exemple 3 : comparaison des moments dans les montants calculés suivant les deux méthodes.**

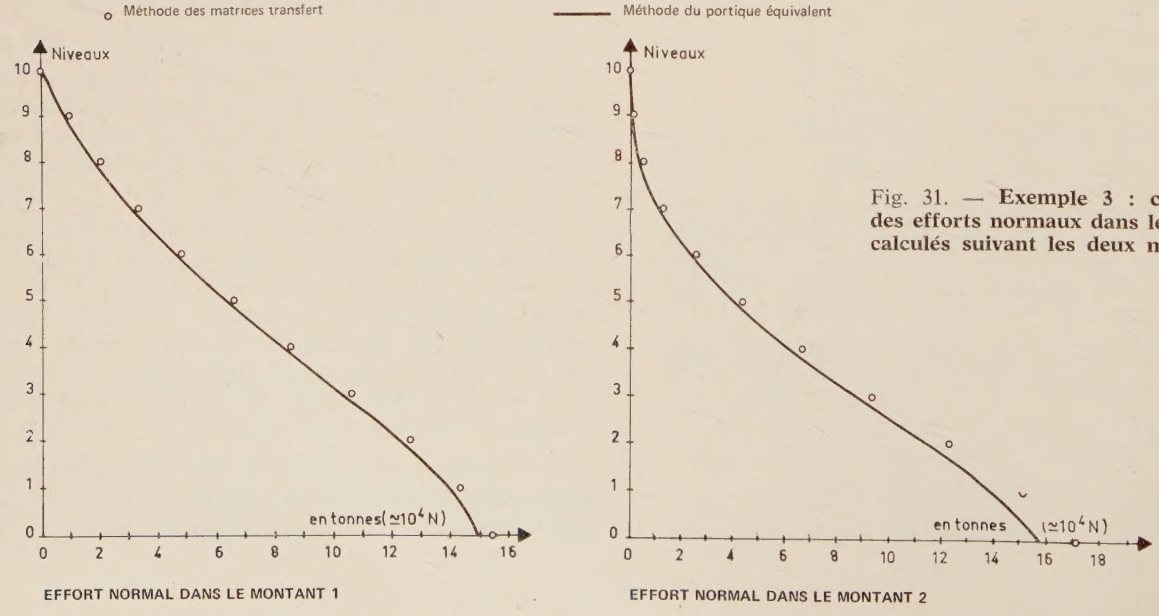


Fig. 31. — **Exemple 3 : comparaison des efforts normaux dans les montants calculés suivant les deux méthodes.**

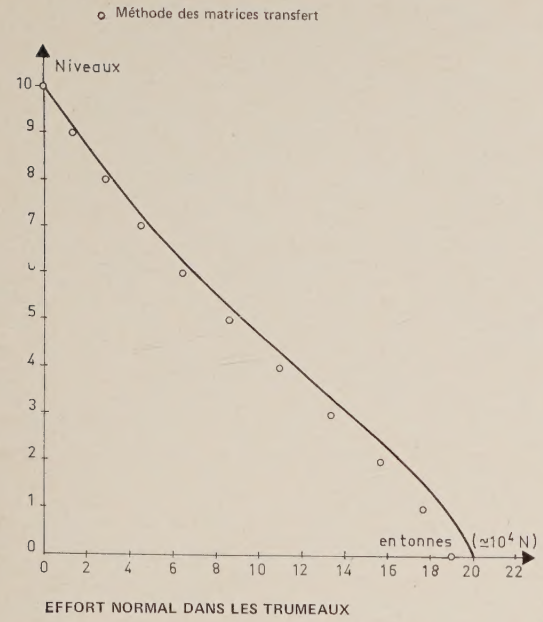


Fig. 32. — **Exemple 3 : comparaison des efforts normaux dans les trumeaux.**

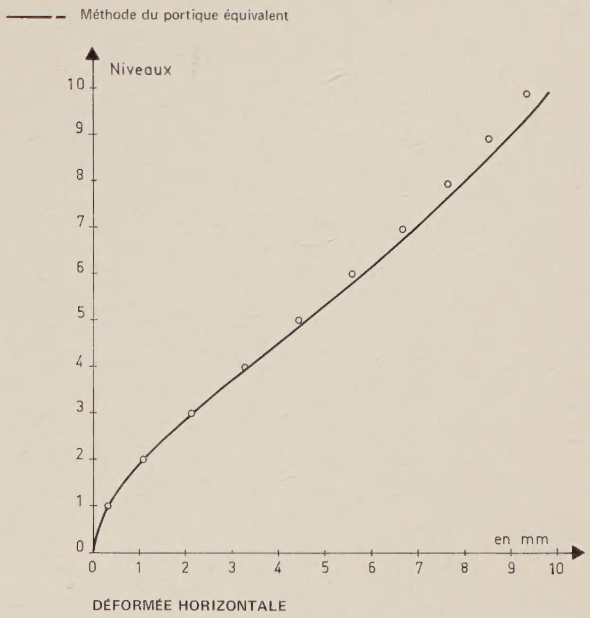
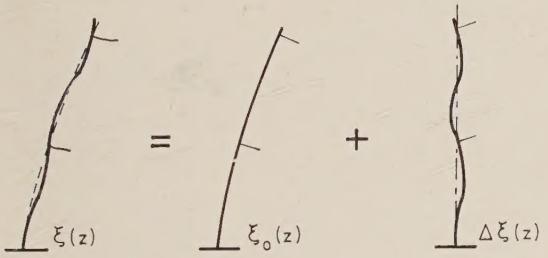


Fig. 33. — **Exemple 3 : comparaison de la déformée horizontale suivant la méthode de calcul.**

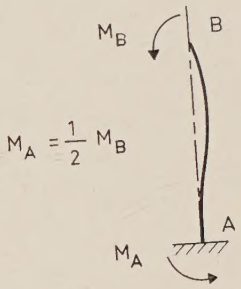
50 % et 20 %). Il est possible d'apporter une correction à ces valeurs sous-estimées des moments en pied en leur ajoutant le quart du saut de moment du premier étage. En effet, la déformée $\xi(z)$ d'un montant du portique peut s'écrire :

$$\xi(z) = \xi_o(z) + \Delta\xi(z)$$



Or, si on isole le premier étage du montant, soumis à la déformation $\Delta\xi(z)$, on a :

Des considérations simples de statique montrent que



M_B est majoré par la moitié du saut de moment en B, c'est-à-dire que M_A est majoré par le quart du saut de moment au premier étage. La correction indiquée ci-dessus, consistant à ajouter au moment en pied donné par la méthode des matrices transfert (égal à $EI\,\xi''_o(o)$) le quart du saut de moment au premier étage, donne donc un majorant de la valeur réelle.

Ces majorants ont été indiqués sur les courbes des moments dans les montants du portique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABSI (E.). — « Etude de problèmes particuliers (III) », *Annales de l'ITBTP,* série TMC/139, (mai 1971).

[2] ALBIGES (M.) et GOULET (J.). — « Contreventement des bâtiments », *Annales de l'ITBTP,* série TMC/38, (mai 1960).

[3] CALGARO (J.-A.) et GERY (P.-M.). — « Les matrices transfert dans le calcul des structures », Eyrolles (Paris, 1973).

[4] COIN (A.), DECAUCHY (A.) et COLLIGNON (J.-P.). — « Murs de contreventement à ouvertures multiples », *Annales de l'ITBTP,* série TMC/132, (février 1971).

[5] DESPEYROUX (J.) et GUILLOT (V.). — « Problèmes de contreventement », *Annales de l'ITBTP,* série TMC/147 (février 1972).

[6] HENIN (M.). — « Calcul statique des systèmes de contreventement tridimensionnels irréguliers par la méthode des matrices transfert », Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI (octobre 1976).

[7] VLASSOV (B.Z.). — « Pièces longues en voiles minces », Eyrolles édit. (Paris, 1962).

Edité par la S. A. Le Bâtiment
6, rue Paul-Valéry, 75116 Paris
NOUVELLES PRESSES DU CENTRE
87 - LIMOGES
Dépôt légal : 1er trimestre 1978
Commission Paritaire nº 23.960
(Ann. I.T.B.T.P.)
Le Directeur : J.-C. MALDAGUE